C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 59-62, 1998
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d'une courbe plane

Evelia GARCIA BARROSO

Facultad de Matemáticas, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna, Tenerife, España
E-mail : ergarcia@ull.es

(Reçu le 14 novembre 1997, accepté le 24 novembre 1997)

Résumé. Dans cette Note nous énonçons un théorème de décomposition en paquets de branches (c'est-à-dire de germes irréductibles) pour les courbes polaires génériques d'un germe réduit de courbe analytique complexe plane, C d'équation $f(x,y) = 0$. Il s'agit des courbes d'équation $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \tau \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ avec τ générique. Par construction, toutes les branches d'un même paquet ont le même contact avec chacune des branches de C. Un certain nombre des premiers termes du développement de Puiseux de chaque branche de la polaire est donc indépendant de τ. Ce nombre peut être calculé en fonction du paquet auquel appartient la branche. Ce résultat généralise des résultats de H.J.S. Smith [8], M. Merle [7] (le cas où C est une branche), E. Casas [1], F. Delgado [2]. Nous montrons par un exemple qu'il est aussi, en un sens, optimal. Nous avons montré ailleurs qu'il implique les résultats de Lê–Michel–Weber [6].

A decomposition theorem for the generic polars of a plane curve

Abstract. *In this Note we state a decomposition theorem into bunches of branches (i.e. analytically irreducible germs) for the generic polar curves of a reduced germ of a plane analytic curve, with equation $f(x,y) = 0$. They are the curves with equation $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \tau \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ with generic τ. All the branches of the same bunch have the same contact with each branch of C. A number of the first terms of the Puiseux expansion of each branch of the polar is therefore independent of τ; this number depends only on the bunch to which the branch belongs. This generalizes results of H.J.S. Smith* [8], *M. Merle* [7] *(where C is a branch), E. Casas* [1], *F. Delgado* [2]. *We show by an example that it is also optimal. We have shown elsewhere that it implies the results of Lê–Michel–Weber* [6].

1. Introduction

Soient $(C,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe réduit de courbe analytique plane à singularité isolée à l'origine de multiplicité n et $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ sa décomposition en composantes irréductibles. Notons I l'ensemble $\{1,\dots,r\}$ et $\{n_i = \beta_0^i,\dots,\beta_{g_i}^i\}$ les exposants caractéristiques de C_i,

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

$l_k^i = \text{p.g.c.d.}(\beta_0^i, \ldots, \beta_k^i)$ où $j \in \{0, \ldots, g_i\}$, $\{(m_k^i, n_k^i)\}_{k=1}^{g_i}$ les paires caractéristiques de C_i ($\beta_k^i = m_k^i l_k^i$ et $l_{k-1}^i = n_k^i l_l^i$), $\Gamma(C_i) = \langle \overline{\beta_0^i}, \ldots, \overline{\beta_{g_i}^i} \rangle$ le semi-groupe des valeurs de C_i. De plus, si C_i et C_j sont deux branches différentes de C, on appelle *contact* de C_i avec C_j le nombre rationnel

$$\alpha_{ij} := \text{cont}(C_i, C_j) = n_i \max_{1 \leq k \leq n_i, 1 \leq l \leq n_j} \{\text{ord}_x(y_k(x^{1/n_i}) - z_l(x^{1/n_j}))\}$$

où $\{y_k(x^{(1/n_i)})\}_{k=1}^{n_i}$ est l'ensemble des paramétrisations de C_i et $\{z_l(x^{(1/n_j)})\}_{l=1}^{n_j}$ l'ensemble des paramétrisations de C_j. Le contact entre C_i et C_j donne donc une mesure de la coïncidence des paramétrisations de C_i et de C_j. D'autre part, d'après les résultats de Smith [8], Zariski [10] et Merle [7] on peut relier la multiplicité d'intersection à l'origine, (C_i, C_j) de deux branches C_i et C_j, avec le contact entre elles de la façon suivante :

$$\beta_q^i \leq \alpha_{ij} < \beta_{q+1}^i \iff \frac{(C_i, C_j)}{m(C_j)} = \frac{n_q^i \overline{\beta_q^i} + \alpha_{ij} - \beta_q^i}{n_1^i \cdots n_q^i} \tag{1}$$

où par convention $n_0^i = n_{-1}^i = 1$, $l_0^i = n_i$ et $\beta_{g_i+1}^i = \infty$.

À chaque branche C_i de C on va associer un ensemble $S_i := S_i^1 \cup S_i^2$, où $S_i^1 = \left\{\frac{\beta_k^i}{n_i}\right\}_{k=1}^{g_i}$ et $S_i^2 = \left\{\frac{\alpha_{ij}}{n_i}\right\}_{i \neq j}$.

2. Le diagramme d'Eggers

Le diagramme d'Eggers (*voir* [3]) est une représentation graphique commode de la topologie de C, c'est-à-dire des exposants caractéristiques des différentes branches de la courbe C et aussi du contact entre elles.

DÉFINITION 1. – Soit C_i une branche de C, on appelle *chaîne élémentaire* de C_i le graphe K_i défini comme suit :

Les sommets sont des points noirs et un point blanc ; les points noirs sont en correspondance bijective avec les éléments de S_i par une application v que nous appelons *valuation*. Le sommet blanc n'a pas de valuation.

Les sommets sont reliés de la façon suivante :

Le sommet blanc est relié avec le sommet noir de valuation la plus grande par une arête, qui est pointillée si la valuation est un élément de $S_i^2 - S_i^1$. Si on prend un sommet noir, disons Q, dont la valuation n'est pas maximale, il est relié avec le sommet de valuation supérieure la plus proche par une arête, qui est pointillée si $v(Q)$ est dans $S_i^2 - S_i^1$.

Si on prend deux branches différentes C_i , C_j de C, on appelle *graphe partiel* K_{ij} de C_i et C_j, le plus petit sous-graphe connexe de K_i qui contient les sommets $Q \in K_i$ avec $v(Q) \leq \frac{\alpha_{ij}}{n_i}$. Les graphes partiels K_{ij} et K_{ji} sont égaux.

Finalement, on définit le *diagramme d'Eggers* $T(C)$ *de* C comme le graphe obtenu en identifiant les graphes partiels K_{ij}, K_{ji} dans la réunion disjointe des chaînes élémentaires $K_1, \ldots, K_r$.

On appelle *point base de* $T(C)$ le sommet de $T(C)$ de valuation la plus petite. Maintenant, on va associer trois nombres à chaque sommet noir Q de $T(C)$: $d_1(Q)$ (resp. $d_2(Q)$) est le nombre d'arêtes pointillées (resp. pleines) de $T(C)$ qui sortent de Q vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers un sommet blanc de $T(C)$ et $k(Q)$ est le nombre d'arêtes pleines entre Q et le point base.

3. La courbe polaire et le diagramme d'Eggers

Considérons maintenant la surface $\mathcal{P}(C)$ d'équation $\frac{\partial f}{\partial y}+\tau\frac{\partial f}{\partial x}=0$ dans un ouvert $\mathbb{P}^1\times V\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}^2$, où V est un ouvert de $\mathbb{C}^2$ dans lequel f converge.

D'après Zariski (*voir* [11], [9]) il existe un ouvert de Zariski dense U de $\mathbb{P}^1$ ($U=\mathbb{P}^1-A$, où A est un ensemble fini contenant les tangentes à C) tel que si $(1:\tau)\in U$ la surface $\mathcal{P}(C)$ est équisingulière (au sens de Zariski [11]) le long de $\mathbb{P}^1\times\{0\}$ en $(1:\tau)$. La courbe $P_\tau(C):\equiv\frac{\partial f}{\partial y}+\tau\frac{\partial f}{\partial x}=0$ est appelée *courbe polaire générique*.

Maintenant, si on considère $\mathcal{P}(C)$ comme la famille des courbes polaires génériques $\{P_\tau(C)\}_\tau$ de C, paramétrée par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, d'après l'équisingularité, $\mathcal{P}(C)$ a une paramétrisation simultanée au voisinage de tout point $\tau_0\in U$, ce qui permet de décrire la variation de $(P_\tau(C))_\tau$ par la paramétrisation simultanée des branches.

De plus, puisque U est connexe, le nombre des composantes irréductibles de $(P_\tau(C))_\tau$ est indépendant de $\tau\in U$ et au voisinage de chaque point de U, chaque composante irréductible de $(P_\tau(C))_\tau$ a une paramétrisation $(x,y)=(t_q^{m_q},y(t_q,\tau))$, où $y(t_q,\tau)\in\mathbb{C}\{t_q,\tau\}$.

Ainsi, si $P_\tau(C)$ est une courbe polaire générique, d'après la constance, pour $\tau\in U$, du nombre des composantes irréductibles, on peut se permettre d'écrire $P_\tau(C)=\bigcup_l\Gamma_l$ comme la décomposition en composantes irréductibles de la courbe $P_\tau(C)$ et cette décomposition correspond à la décomposition en composantes irréductibles de la surface $\mathcal{P}(C)$ au voisinage du point $(\tau,0)$.

Kuo et Lu dans le lemme 3.3, p. 302 de [5], établissent une relation entre les ordres de coïncidence de deux paramétrisations de C et les ordres de coïncidence d'une paramétrisation de C et une paramétrisation de $P_\tau(C)$.

À partir de ce résultat Eggers [3], avec le lemme 2, p. 20, donne des informations sur la multiplicité des courbes qui sont la réunion de certaines branches d'une courbe polaire générique de la courbe réduite C en fonction de la multiplicité des branches de C.

Maintenant, définissons dans l'ensemble $\{\Gamma_l\}_l$ des composantes irréductibles de la courbe polaire générique $P_\tau(C)$ la relation d'équivalence suivante :

$$\Gamma_l\,R\,\Gamma_m \iff \mathrm{cont}(C_i,\Gamma_l)=\mathrm{cont}(C_i,\Gamma_m)\quad\text{pour chaque branche } C_i \text{ de } C \tag{2}$$

ou, de manière équivalente, d'après (1),

$$\Gamma_l\,R\,\Gamma_m \iff \frac{(C_i,\Gamma_l)}{m(\Gamma_l)}=\frac{(C_i,\Gamma_m)}{m(\Gamma_m)}\quad\text{pour chaque branche } C_i \text{ de } C$$

D'après le théorème 1 de [3], p. 14, on sait qu'il existe une correspondance bijective σ entre l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$ et l'ensemble quotient de la relation R.

4. Énoncé du théorème de décomposition

Le but de ce paragraphe est de donner, à partir de la bijection σ, une décomposition « en paquets » $\{\Gamma^Q\}_{Q\in L}$ d'une courbe polaire générique $P_\tau(C)$, où L est l'ensemble de sommets noirs de $T(C)$, de telle façon que la valuation du sommet Q associée au « paquet » Γ^Q permette non seulement de calculer les données (multiplicité à l'origine et contact avec les branches de la courbe C) du « paquet » Γ^Q comme l'a déjà fait Eggers [3], mais aussi, à partir des résultats d'équisingularité de Zariski [11] et Teissier [9] d'exprimer les développements à la Puiseux de branches de la courbe polaire à partir des développements de Puiseux de branches de C.

THÉORÈME 1. – *Soient $C=\bigcup_{i=1}^r C_i$ un germe réduit de courbe plane et L l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$. Il existe un ouvert de Zariski $U\subset\mathbb{P}^1$ tel que pour $\tau\in U$, le germe $P_\tau(C)$ se* *décompose en « paquets » $\{\Gamma^Q\}_{Q\in L}$ qui ne sont pas nécessairement irréductibles et pour lesquels il existe $i_0 \in I_Q$ tel que:*

1. $m(\Gamma^Q) = n_1^{i_0} \cdots n_q^{i_0}(d_1(Q) + d_2(Q)n_{q+1}^{i_0} - 1)$, *où* $k(Q) = q$ *;*
2. *toute composante irréductible Γ_k^Q de Γ^Q a un développement à la Puiseux de la forme :*

$$\begin{cases} x = t_k^{\tilde{m}_k^Q} \\ y = a_{n_{i_0}} t_k^{\tilde{m}_k^Q} + \cdots + a_{sn_{i_0}} t_k^{s\tilde{m}_k^Q} + a_{\beta_1^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \cdots + a_{\beta_q^{i_0}} t_k^{\tilde{\beta}_q^{i_0}} + \cdots + \\ \qquad + a_{n_{i_0}v(Q)-1} t_k^{\frac{m_k^Q(n_{i_0}v(Q)-1)}{n_{i_0}}} + \displaystyle\sum_{j \geq n_{i_0}v(Q)} b_j^k(\tau) t_k^{jm_k^Q/n_{i_0}} \end{cases}$$

où $m_k^Q = m(\Gamma_k^Q)$, t_k est un paramètre uniformisant, le tilde indique que les exposants ont été divisés par $\frac{n_{i_0}}{m_k^Q}$, et où $(a_{n_{i_0}}, \ldots, a_{sn_{i_0}}, a_{\beta_1^{i_0}}, \ldots, a_{\beta_q^{i_0}}, \ldots, a_{n_{i_0}v(Q)-1})$ sont les coefficients d'un développement de Puiseux de C_{i_0}, jusqu'au terme $n_{i_0}v(Q) - 1$, et sont donc indépendants de τ pour toute valeur τ qui appartient à l'ouvert U d'équisingularité.

Remarquons que si $d_2(Q) > 0$ on doit prendre i_0 de telle façon que l'arête qui sort de Q dans la chaîne K_{i_0} vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers le sommet blanc est pleine.

On prendra garde que les exposants $\frac{jm_k^Q}{n_{i_0}}$ pour $j \geq n_{i_0}v(Q)$ peuvent être fractionnaires.

La démonstration utilise la formule 1 et se trouve dans [4], p. 164.

Le résultat de ce théorème est optimal comme le montre l'exemple suivant : si $C \equiv f_1(x,y)f_2(x,y) = 0$, où $f_1(x,y) = y^4 - 4y^3x^2 + (6x^2 - 2x^3)y^2 + (4x^5 - 8x^6)y - x^9 + x^6 + 5x^8 - 2x^7$ et $f_2(x,y) = y^4 + 4y^3x^2 + (6x^4 - 2x^3)y^2 + (-4x^5 + 4x^6 - 4x^7)y - 4x^9 + x^6 + x^8 - 2x^7 - x^{11}$, la polaire $P_\tau(C)$ a un paquet irréductible de paramétrisation $y = \frac{3\tau}{2}x^2 + \cdots$, donc le premier terme qui peut apparaître après le contact apparaît et dépend de τ.

Pendant la préparation de ce travail, l'auteur a bénéficié du soutien de la DGUI du gouvernement des Iles Canaries, et de l'hospitalité du DMI de l'ENS de Paris.

Références bibliographiques

[1] E. Casas-Alvero. Base points of polar curves, Ann. Inst. Fourier, 41 (1991), 1–10.

[2] F. Delgado de la Mata. A factorization theorem for the polar of a curve with two branches, Compos. Math., 92 (1994), 327–375.

[3] H. Eggers. Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitaen, Bonner Mathematische Schriften, 147, 1983.

[4] E. García Barroso. Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor, Thèse, Université, 1996.

[5] T.C. Kuo, Y.C. Lu. On analytic function germs of two complex variables, Topology 16 (1977), 299–310.

[6] Lê, F. Michel, C. Weber. Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes, Compos. Math., 72 (1989), 87–113.

[7] M. Merle. Invariants polaires des courbes planes, Invent. Math. 41 (1977), 103–111.

[8] H.J.S. Smith. On the higher singularities of plane curves, Proc. London Math. Soc., Vol. VI (1875), 153–182.

[9] B. Teissier. Introduction to equisingularity problems, Proc. Symp. Pure Math., Algebraic Geometry, Arcata, 29 (1975), 593–632.

[10] O. Zariski. General theory of saturation and of saturated local rings II, Equisingularity on Algebraic Varieties, Collected Papers, Volume IV, 1979, 325–417.

[11] O. Zariski. Questions in algebraic varieties, Contribution to the problems of equisingularity, CIME, Edizioni Cremonese, Roma, 1970, 261–343.