

SUR LES COURBES POLAIRES D'UNE COURBE PLANE RÉDUITE

EVELIA R. GARCÍA BARROSO

[Received 17 February 1998; revised 4 January 1999]

1. Introduction

Étant donné un représentant d'un germe réduit de courbe analytique plane, on peut le voir comme ensemble des zéros d'une équation $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et $f(0, 0) = 0$, ou bien comme donné par les paramétrisations de Puiseux de ses branches (composantes irréductibles). Dans cette dernière interprétation nous pouvons parler des exposants caractéristiques de chaque branche de C et du contact entre deux branches C_i et C_j de C . Le contact peut s'interpréter comme une mesure de coïncidence entre les différentes paramétrisations de C_i et C_j ; et aussi en fonction de la multiplicité d'intersection en 0 de ces deux branches de C et de leur multiplicité en 0.

Dans cet article nous voulons, à partir de cette interprétation d'une courbe, exprimer des propriétés des courbes polaires génériques $P(\tau)$ d'un germe réduit de courbe analytique plane C à partir des propriétés de C . L'équation d'une courbe polaire est

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

et nous nous intéressons au contact avec les branches de C des branches de $P(\tau)$. Plus précisément, nous énonçons un théorème optimal (comme le montre un exemple) de décomposition en paquets des branches de $P(\tau)$. L'ensemble de ces paquets est indexé par un graphe qui ne dépend que de la topologie de la courbe C donnée. Par construction, toutes les branches d'un même paquet ont le même contact avec chacune des branches de C et en conséquence un certain nombre des premiers termes du développement de Puiseux de chaque branche de $P(\tau)$ sont donc indépendants de τ d'après l'interprétation du contact comme mesure de coïncidence entre les paramétrisations. Toutes les propriétés qu'on en déduit ne dépendent que du type topologique de C (de sa classe d'équisingularité); en particulier la décomposition en paquets fournit des invariants numériques du type topologique de C , dont Merle avait montré dans le cas où C est irréductible qu'ils déterminent ce type topologique.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous cherchons à déterminer dans quelle mesure le contact avec les branches de C des branches de $P(\tau)$ détermine le type topologique de C . Pour cela nous définissons une matrice qui ne dépend que du type topologique de C et le détermine.

Dans un appendice, nous montrons comment retrouver le théorème de

Lê–Michel–Weber sur le comportement des polaires dans une résolution plongée des singularités de C à partir des résultats prouvés dans la première partie.

L'étude du contact d'une singularité réduite de courbe plane avec sa polaire a une longue histoire, remontant à Poncelet [11], Plücker [10], et H. J. S. Smith [13], dans la perspective de la démonstration de formules de Plücker générales. Le fait que la classe d'équisingularité de la polaire ne dépende pas seulement de la classe d'équisingularité de C semble avoir été découvert par B. Segre [12]. Dans la période récente, on s'est intéressé aux caractères de ce contact qui ne dépendent que du type topologique de C , sous la forme du polygone de Newton jacobien introduit dans [16], que Merle a déterminé, dans le cas où C est irréductible, en fonction des exposants de Puiseux de C . Ce résultat de Merle faisait apparaître que la courbe polaire se décomposait en paquets de branches ayant même contact avec C , la multiplicité de chaque paquet étant déterminée par la topologie de C , alors que le nombre des branches de ce paquet peut varier avec le type analytique de C . De nombreux travaux s'en sont suivis [7, 4, 1, 2, 3, ...]. Le résultat présenté ici généralise ce fait, et est optimal en un certain sens, comme le montre l'exemple de la § 5.3.

Je remercie vivement Bernard Teissier qui m'a proposé ce sujet et avec qui j'ai eu des discussions fructueuses. Pendant la préparation de ce travail, l'auteur a bénéficié du soutien de la DGUI du gouvernement des Iles Canaries, et de l'hospitalité du DMI de l'ENS de Paris.

2. Notations et premières définitions

Soit $f(x, y) = 0$, $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et $f(0, y) \neq 0$ une équation d'un germe irréductible de courbe plane à singularité isolée à l'origine $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ de multiplicité n . Si $x = 0$ est transverse à C , il existe une paramétrisation de C de la forme suivante:

$$x = t^n, \quad y = \sum_{i \geq n} a_i t^i.$$

Ce qui équivaut à la paramétrisation à la Newton–Puiseux $y = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n}$. Toutes les autres paramétrisations à la Newton–Puiseux de C sont déduites de celle-ci par l'action du group μ_n des racines n -ième de l'unité déterminés par $x^{1/n} \rightarrow \omega x^{1/n}$ où $\omega \in \mu_n$ est une racine primitive n -ième de l'unité. Soient $\{\beta_0, \dots, \beta_g\} \subset \mathbb{N}$ les exposants caractéristiques de C qui sont définis par récurrence de la manière suivante:

$$\beta_0 = m(C) = n,$$

$$\beta_{q+1} = \min\{i \in \mathbb{N}: a_i \neq 0 \text{ et } i \not\equiv 0 \pmod{\text{p.g.c.d.}(\beta_0, \dots, \beta_q)}\}.$$

Il existe $g \geq 1$ minimal tel que $\text{p.g.c.d.}(\beta_0, \dots, \beta_g) = 1$. Soient alors: $l_0 = m(C)$ et $l_q = \text{p.g.c.d.}(\beta_0, \dots, \beta_q) = \text{p.g.c.d.}(l_{q-1}, \beta_q)$. Donc il existe $\{(m_k, n_k)_{k=1}^g\}$ tels que $\beta_q = m_q l_q$, $l_{q-1} = n_q l_q$ et $\text{p.g.c.d.}(m_q, n_q) = 1$. Les paires $\{(m_k, n_k)_{k=1}^g\}$ sont appelés *paires caractéristiques* de C .

Soit $\Gamma(C) = \{(C, D): C \text{ n'est pas une composante de } D\}$ le *semi-groupe de valeurs* de C , où (C, D) est la multiplicité d'intersection à l'origine de C avec une courbe quelconque D . D'après Zariski [18] il existe un système minimal de générateurs de $\Gamma(C)$, $\{\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g\}$ qui vérifie $\bar{\beta}_0 = \beta_0 = m(C)$, $\bar{\beta}_1 = \beta_1$, et

$\bar{\beta}_q = n_{q-1}\bar{\beta}_{q-1} + \beta_q - \beta_{q-1}$ pour tout $q \in \{2, \dots, g\}$. De plus si C et D sont deux branches à l'origine, on appelle *contact* de C avec D le nombre rationnel

$$\text{cont}(C, D) = n \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{\text{ord}_x(y_i(x^{1/n}) - z_j(x^{1/m}))\}$$

où $m(C) = n$, $m(D) = m$, $\{y_i(x^{1/n})\}_{i=1}^n$ est l'ensemble des paramétrisations à la Newton–Puiseux de C et $\{z_i(x^{1/m})\}_{i=1}^m$ est l'ensemble des paramétrisations à la Newton–Puiseux de D . Le contact entre C et D donne donc une mesure de la coïncidence des paramétrisations à la Newton–Puiseux de C et de D . On doit remarquer aussi que

$$\frac{\text{cont}(C, D)}{m(C)} = \frac{\text{cont}(D, C)}{m(D)}.$$

D'autre part d'après les résultats de Smith, Zariski et Merle on peut relier la multiplicité d'intersection à l'origine de deux branches C et D avec le contact entre elles de la façon suivante.

PROPOSITION 2.1 (Smith [13], Zariski [19], Merle [9]). *Soient C et D deux germes de courbes irréductibles planes. Si α est un nombre rationnel et les exposants caractéristiques de C sont $\{\beta_0, \dots, \beta_g\}$ tels que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$ (par convention $\beta_{g+1} = \infty$) alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $\alpha = \text{cont}(C, D)$;
- (2) $\frac{(C, D)}{m(D)} = \frac{n_q \bar{\beta}_q + \alpha - \beta_q}{n_1 \dots n_q}$,
où par convention $n_0 = n_{-1} = 1$ et $l_0 = m(C)$.

Soit maintenant un germe réduit de courbe analytique plane à singularité isolée à l'origine $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ de multiplicité n et $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$ sa décomposition en composantes irréductibles. Notons I l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ et $\{n_i = \beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\}$ les exposants caractéristiques de C_i , $l_k^i = \text{p.g.c.d.}(\beta_0^i, \dots, \beta_k^i)$ où $k \in \{0, \dots, g_i\}$, $\{(m_k^i, n_k^i)\}_{k=1}^{g_i}$ les paires caractéristiques de C_i , $\Gamma(C_i) = \langle \{\bar{\beta}_0^i, \dots, \bar{\beta}_{g_i}^i\} \rangle$ le semi-groupe de valeurs de C_i , et $\alpha_{ij} = \text{cont}(C_i, C_j)$ avec $j \neq i$.

À chaque branche C_i de C on va associer un ensemble $S_i := S_i^1 \cup S_i^2$ où $S_i^1 = \{\beta_k^i/n_i\}_{k=1}^{g_i}$ et $S_i^2 = \{\alpha_{ij}/n_i\}_{i \neq j}$. Par définition des paires caractéristiques $\{(m_k^i, n_k^i)\}_{k=1}^{g_i}$, on a l'égalité

$$\frac{\beta_k^i}{n_i} = \frac{m_k^i}{n_1^i \dots n_k^i}.$$

DÉFINITION 2.1. Soient deux germes à l'origine de courbes réduites planes $C \equiv f(x, y) = uf_1 \dots f_r$ et $D \equiv g(x, y) = vg_1 \dots g_s$. Soit $\{C_i \equiv f_i = 0\}_{i=1}^r$ l'ensemble des branches de C et $\{D_i \equiv g_i = 0\}_{i=1}^s$ l'ensemble des branches de D . On dit que C et D sont *équisingulières* (c'est-à-dire elles ont le même type topologique) si

- (1) $r = s$;
- (2) il existe une bijection $\varphi: \{C_i\}_{i=1}^r \rightarrow \{D_i\}_{i=1}^r$ telle que:
 - (a) $\varphi(C_i) = D_i$ (au prix d'une renumérotation des branches de D),
 - (b) pour tout i , C_i et D_i sont des branches équisingulières, c'est-à-dire elles ont les mêmes exposants caractéristiques,

(c) pour tout i, j avec $1 \leq i, j \leq r$, $(C_i, C_j) = (D_i, D_j)$.

L'équisingularité est équivalente au fait que C et D sont topologiquement équivalentes en tant que surfaces plongées dans \mathbb{C}^2 (voir [18]).

3. Le diagramme d'Eggers

Le diagramme d'Eggers [4] est une représentation graphique commode des exposants caractéristiques des différentes branches de la courbe C et aussi du contact entre elles, c'est-à-dire qu'il est une représentation de la topologie de C , puisque l'on sait que le type topologique de $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ est déterminé par ces nombres.

DÉFINITION 3.1. Soit C_i une branche de C , on appelle *chaîne élémentaire* de C_i le graphe K_i défini comme suit.

1. Les sommets sont des points noirs et un point blanc; les points noirs sont en correspondance bijective avec les éléments de S_i par une application v que nous appelons *valuation*.
2. Le sommet blanc n'a pas de valuation.
3. Les sommets sont reliés de la façon suivante. Le sommet blanc est relié au sommet noir de valuation la plus grande par une arête, qui est discontinue si la valuation est un élément de $S_i^2 - S_i^1$. Si on prend un sommet noir, disons Q , dont la valuation n'est pas maximale, il est relié au sommet de valuation supérieure la plus proche par une arête, qui est discontinue si $v(Q)$ est dans $S_i^2 - S_i^1$.

Si on prend deux branches différentes C_i, C_j de C , on appelle *graphe partiel* K_{ij} de C_i et C_j , le plus petit sous-graphe connexe de K_i qui contient les sommets $Q \in K_i$ avec $v(Q) \leq \alpha_{ij}/n_i$. Les graphes partiels K_{ij} et K_{ji} sont égaux.

Finalement on définit le *diagramme d'Eggers* $T(C)$ de C comme le graphe obtenu en identifiant les graphes partiels K_{ij}, K_{ji} dans la réunion disjointe des chaînes élémentaires K_1, \dots, K_r . On voit aussitôt que deux germes de courbes réduites sont équisinguliers si et seulement si ils ont le même diagramme d'Eggers.

EXEMPLE 3.1. Soit

$$C \equiv f = f_1 \cdot f_2 = [(y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9][(y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7] = 0.$$

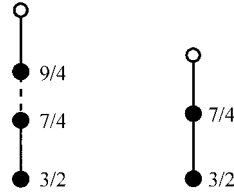
Si $C_i \equiv f_i(x, y) = 0$ alors

$$S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{4} \right\}$$

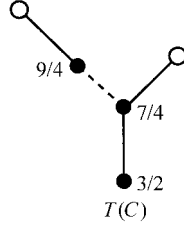
et

$$S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{4} \right\}.$$

Ainsi les chaînes élémentaires sont



et le diagramme d'Eggers de C est



On appelle *point base de $T(C)$* le sommet de $T(C)$ de valuation la plus petite.

REMARQUE 3.1. En général il n'y a pas de bijection entre les sommets noirs de $T(C)$ et l'ensemble $\bigcup_i S_i$. Pour voir un exemple il suffit de prendre deux branches C_1 et C_2 équisingulières telles que $\text{cont}(C_1, C_2) < \beta_{g_1}^1$.

Maintenant on va associer trois nombres à chaque sommet noir Q de $T(C)$:

$d_1(Q)$ est le nombre d'arêtes discontinues de $T(C)$ qui sortent de Q vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers un sommet blanc de $T(C)$;

$d_2(Q)$ est le nombre d'arêtes pleines de $T(C)$ qui sortent de Q vers un sommet noir de valuation plus grande ou vers un sommet blanc de $T(C)$;

$k(Q)$ est le nombre d'arêtes pleines entre Q et le point base.

DÉFINITION 3.2. Soit Q un sommet noir de $T(C)$. On dira que Q est un *sommet simple de $T(C)$* si $d_1(Q) + d_2(Q) = 1$ (c'est-à-dire, $d_1(Q) = 0$ et $d_2(Q) = 1$ puisque $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = 1$ à la même fois est impossible). Dans le cas contraire on dira que Q est un *sommet de bifurcation*.

LEMME 3.1. 1. La courbe C contient deux branches transverses si et seulement si la valuation du point base de $T(C)$ est égale à 1.

2. Si Q est un sommet de $T(C)$ tel que $v(Q) = 1$ (Q est le point base de $T(C)$) alors $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = t$ où t est le nombre des composantes tangentielles de C , c'est-à-dire le nombre de droites tangentes distinctes de C .

Démonstration. Il existe deux branches C_i et C_j de C telles que $(C_i, C_j) = m(C_i)m(C_j)$ si et seulement si

$$\frac{(C_i, C_j)}{m(C_j)} = m(C_i) = \overline{\beta_0^i}. \quad (1)$$

Mais d'après la proposition (2.1) on sait que (1) est équivalent à $\text{cont}(C_i, C_j) = \beta_0^i$. De plus $\text{cont}(C_i, C_j) = \beta_0^i$ si et seulement s'il existe un sommet Q de $T(C)$ tel que $v(Q) = \alpha_{ij}/n_i = 1$ et nécessairement Q doit être le point base de $T(C)$. D'autre part, comme $v(Q) = 1 \neq \beta_k^i/n_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, g_i\}$, donc $d_2(Q) = 0$. De plus si les chaînes élémentaires K_i de C_i et K_j de C_j sont séparées dans le sommet Q alors

$$\frac{\text{cont}(C_i, C_j)}{n_i} = \frac{\text{cont}(C_j, C_i)}{n_j} = 1$$

et d'après la proposition (2.1) on a $(C_i, C_j) = n_i n_j$, c'est-à-dire que K_i et K_j sont

séparées dans le sommet Q si et seulement si C_i et C_j sont transverses. Alors $d_1(Q)$ est égal au nombre de tangentes distinctes de C .

REMARQUE 3.2. La définition du diagramme d'Eggers est facilement extensible à un germe de courbe réductible plane $C \equiv f(x, y) = uf_1^{\sigma_1} \dots f_r^{\sigma_r}$. Il suffit d'ajouter le nombre σ_i au sommet blanc qui correspond à la branche $C_i \equiv f_i(x, y) = 0$ de C .

4. La courbe polaire et le diagramme d'Eggers

Soient $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme défini dans un voisinage ouvert V de l'origine et $l \equiv l(x, y): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire sur \mathbb{C}^2 . On appelle *courbe de niveau* λ de f la courbe $C(\lambda) \subset V$ d'équation $f(x, y) = \lambda$. On appelle *courbe polaire* de f dans la direction l le lieu C_l des points critiques dans V de $(f, l): V \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Si P est un point de C_l alors ou bien P est un point singulier de $C(\lambda)$ ou bien P est un point lisse de $C(\lambda)$ et la droite tangente à $C(\lambda)$ au point P est parallèle à $l(x, y) = 0$. Nous pouvons écrire l'équation d'une courbe polaire de f sous la forme:

$$\sigma \frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{où } (\sigma : \tau) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

D'après les résultats généraux sur l'équisingularité (voir [20] et [14]), il existe un ouvert de Zariski U de l'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des directions de projection tel que pour $(\sigma : \tau) \in U$ les courbes polaires soient toutes équisingulières. Pour simplifier nous nous restreindrons à considérer l'intersection de U avec l'ouvert affine $\sigma \neq 0$, poserons $\sigma = 1$ et, pour $\tau \in U \cap \mathbf{A}^1$, noterons $P(\tau)$ la courbe polaire correspondante, appelée par abus de langage courbe polaire générique. C'est la fibre au dessus de $\tau \in \mathbf{A}^1$ de la surface P définie dans un ouvert de \mathbb{C}^3 par

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Toujours d'après les résultats généraux sur l'équisingularité (*loc. cit.*), il existe un recouvrement de U par des ouverts relativement compacts $(U_\delta)_\delta$ et pour chaque δ il existe un rayon $\epsilon(\delta) > 0$ tel que dans l'ouvert $U_\delta \times \mathbf{B}_{\epsilon(\delta)}$, la famille des courbes polaires est une famille équisingulière de courbes planes et en particulier pour tout $\tau \in U_\delta$ le nombre des composantes irréductibles de $P(\tau)$ est constant et la surface P de $U_\delta \times \mathbf{B}_{\epsilon(\delta)}$ réunion des $(P(\tau))_{\tau \in U_\delta}$ est réunion des surfaces P_q paramétrées de la forme:

$$P_q \cap (U_\delta \times \mathbf{B}_{\epsilon(\delta)}) = \{(x, y): x = t_q^{m_q}, y = y(t_q, \tau) \text{ avec } y(t_q, \tau) \in \mathbb{C}\{t_q, \tau\}\}.$$

Donc $P(\tau)$ désigne aussi bien la courbe polaire correspondant à la direction τ que la fibre au dessus de $\tau \in U$ de la surface P . Puisque la famille des $P(\tau)$ est équisingulière pour $\tau \in U$, nous nous permettrons souvent de supprimer le τ pour des caractères numériques tels que multiplicités, nombres d'intersection, qui sont constants pour $\tau \in U$, et de même pour les composantes irréductibles de P . Ainsi on peut se permettre écrire $P(\tau) = \bigcup_l \Gamma_l$ comme la décomposition en composantes irréductibles de la courbe $P(\tau)$ et cette décomposition correspond à la décomposition en composantes irréductibles de la surface P au voisinage du point $((1 : \tau), 0)$.

Kuo et Lu énoncent dans [7] le lemme suivant qui établit une relation entre les ordres de coïncidence de deux paramétrisations de C et les ordres de coïncidence d'une paramétrisation de C et une paramétrisation de $P(\tau)$.

LEMMA 4.1 (Kuo and Lu [7]). *Soient $y_i(x^{1/n})$, $y_j(x^{1/n})$ deux paramétrisations de $f(x, y) = 0$ où $i \neq j$. Alors il existe une paramétrisation $z_k(x^{1/m})$ de*

$$f_y(x, y) := \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

qui vérifie:

$$\begin{aligned} \text{ord}(y_i(x^{1/n}) - z_k(x^{1/m})) &= \text{ord}(y_j(x^{1/n}) - z_k(x^{1/m})) \\ &= \text{ord}(y_i(x^{1/n}) - y_j(x^{1/n})). \end{aligned} \quad (2)$$

Réciproquement, étant données une paramétrisation $y_i(x^{1/n})$ de $f(x, y) = 0$ et une paramétrisation $z_k(x^{1/m})$ de $f_y(x, y) = 0$, il existe une paramétrisation $y_j(x^{1/n})$ de $f(x, y) = 0$ vérifiant (2).

De plus, étant données une paramétrisation $y_i(x^{1/n})$ de $f(x, y) = 0$ et un nombre rationnel $d > 0$ on a que

$$\begin{aligned} \#\{y_j(x^{1/n}) \in R(f) : \text{ord}(y_i(x^{1/n}) - y_j(x^{1/n})) = d\} \\ = \#\{z_k(x^{1/m}) \in R(f_y) : \text{ord}(y_i(x^{1/n}) - z_k(x^{1/m})) = d\}, \end{aligned}$$

où $R(f)$ est l'ensemble de paramétrisations à la Newton–Puiseux de $f(x, y) = 0$, $R(f_y)$ est l'ensemble de paramétrisations à la Newton–Puiseux de $f_y(x, y) = 0$, n est la multiplicité à l'origine de $f(x, y) = 0$, et m est la multiplicité à l'origine de $f_y(x, y) = 0$.

Dans [6], Gwoździewicz et Płoski ont montré que ce lemme n'est pas vrai avec les seules hypothèses de [7]. Cependant, comme il est montré dans [5], il suffit de choisir des coordonnées (x, y) tel que $C \equiv f(x, y) = 0$ ne contient ni l'axe $x = 0$ ni l'axe $y = 0$ pour que l'énoncé soit correct. Nous nous plaçons désormais dans des coordonnées telles que le lemme ci-dessus soit vrai.

À partir de ce résultat Eggers [4] donne des informations sur la multiplicité des courbes qui sont la réunion des certaines branches d'une courbe polaire générique d'une courbe réduite C en fonction de la multiplicité des branches de C .

LEMME 4.2 (Eggers [4]). *Soit C_i une branche de la courbe plane réduite C et soit $P(\tau)$ une courbe polaire générique de C . Pour tout nombre rationnel $d > 0$ notons B_i^d la courbe formée de toutes les branches Γ de $P(\tau)$ telles que $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i d$. Soit de plus D_i^d la courbe formée de toutes les branches C_j de C telles que $\alpha_{ij} = \text{cont}(C_i, C_j) = n_i d$. Alors*

$$m(B_i^d) = \begin{cases} m(D_i^d) + n_1^i \dots n_{q-1}^i (n_q^i - 1) & \text{si } d = \beta_q^i / n_i, \\ m(D_i^d) & \text{si } d \neq \beta_k^i / n_i \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, g_i\}. \end{cases}$$

Maintenant définissons dans l'ensemble $\{\Gamma_l\}_l$ des composantes irréductibles de la courbe polaire générique $P(\tau)$ la relation d'équivalence suivante:

$$\Gamma_l R \Gamma_m \iff \text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \text{cont}(C_i, \Gamma_m) \text{ pour chaque branche } C_i \text{ de } C, \quad (3)$$

ou de manière équivalente d'après la proposition (2.1),

$$\Gamma_l R \Gamma_m \iff \frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{(C_i, \Gamma_m)}{m(\Gamma_m)} \text{ pour chaque branche } C_i \text{ de } C. \quad (4)$$

Ainsi, la décomposition en 'paquets' que nous cherchons est caractérisée par le fait que toutes les branches d'un même 'paquet' auront le même contact avec chacune des branches de C . Nous allons relier ces 'paquets' de la courbe polaire $P(\tau)$ aux invariants topologiques de la courbe C grâce au diagramme d'Eggers $T(C)$ de C .

PROPOSITION 4.1. *Il existe une correspondance bijective σ entre l'ensemble quotient $\{\Gamma_l\}_l/R$ et l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$.*

Démonstration. Notons $[\Gamma_l]$ la R -classe d'équivalence de la branche Γ_l et I l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ où $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ est la décomposition de C en composantes irréductibles. Si Q est un sommet noir de $T(C)$ notons I_Q l'ensemble $\{i \in I : Q \in K_i\}$ où K_i est la chaîne élémentaire de la branche C_i , et A_Q l'ensemble $\{\Gamma_l \text{ branche de } P(\tau) : \text{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q) \text{ pour tout } i \in I_Q\}$. L'ensemble A_Q n'est pas vide. En effet, si Q est un sommet noir de $T(C)$ et $i \in I_Q$ soient $B_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les branches Γ de $P(\tau)$ qui vérifient $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q)$ et $D_i^{v(Q)}$ la courbe formée de toutes les branches C_j de C telles que $\alpha_{ij} = n_i v(Q)$. D'après le lemme (4.2) s'il existe $q \in \{1, \dots, g_i\}$ tel que $v(Q) = \beta_q^i/n_i$ alors

$$m(B_i^{v(Q)}) = m(D_i^{v(Q)}) + n_1^i \dots n_{q-1}^i (n_q^i - 1)$$

et si $v(Q) \neq \beta_k^i/n_i$ pour tout $k \in \{1, \dots, g_i\}$, il existe $j \in I$ tel que $\alpha_{ij} = \text{cont}(C_i, C_j) = n_i v(Q)$ donc $m(D_i^{v(Q)}) = m(B_i^{v(Q)}) > 0$. De plus on a l'égalité d'ensembles:

$$\{A_Q : Q \text{ est un sommet noir de } T(C)\} = \{\Gamma_l\}_l/R. \quad (5)$$

En effet, soit $Q \in T(C)$ un sommet noir et $\Gamma_0 \in A_Q$. Si $\Gamma_m R \Gamma_0$ alors $\text{cont}(C_i, \Gamma_m) = \text{cont}(C_i, \Gamma_0)$, donc pour tout $i \in I_Q$ on a $\text{cont}(C_i, \Gamma_m) = n_i v(Q)$, c'est-à-dire $\Gamma_m \in A_Q$.

Si maintenant $\Gamma \in A_Q$, alors $\text{cont}(C_i, \Gamma) = \text{cont}(C_i, \Gamma_0)$ pour tout $i \in I_Q$, et si $i \in I - I_Q$ alors $v(Q) > \alpha_{ij}/n_i = \alpha_{ij}/n_j$ pour tout $j \in I_Q$, donc $\text{cont}(C_j, \Gamma) = \text{cont}(C_j, \Gamma_0) = n_j v(Q) > \alpha_{ji} = \text{cont}(C_j, C_i)$, et ainsi $\text{cont}(C_i, \Gamma_0) = \text{cont}(C_i, \Gamma)$.

D'après les propriétés des classes d'équivalence, si $A_Q \neq A_{Q'}$ alors A_Q et $A_{Q'}$ sont disjoints. Soient maintenant $[\Gamma]$ une R -classe d'équivalence et C_p une branche de C telle que

$$\frac{\text{cont}(C_p, \Gamma)}{m(C_p)} = \max_{1 \leq q \leq r} \left\{ \frac{\text{cont}(C_q, \Gamma)}{m(C_q)} \right\}.$$

D'après les lemmes (4.1) et (4.2),

$$\text{cont}(C_p, \Gamma) \in \{\beta_i^p\}_{i=1}^{g_p} \cup \{\alpha_{pj}\}_{j \in I, j \neq p},$$

donc il existe un sommet noir $Q \in K_p$ qui vérifie

$$\frac{\text{cont}(C_p, \Gamma)}{m(C_p)} = v(Q)$$

et $\Gamma \in A_Q$. D'autre part, si Q, Q' sont deux sommets noirs de $T(C)$ on a $Q = Q'$ si et seulement si $A_Q = A_{Q'}$.

Par construction, si $Q = Q'$ alors $A_Q = A_{Q'}$. Démontrons l'autre implication. Supposons que $A_Q = A_{Q'}$ et $Q \neq Q'$. S'il existe $i \in I_Q \cap I_{Q'}$ et $\Gamma \in A_Q = A_{Q'}$ alors $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q) = n_i v(Q')$, donc $v(Q) = v(Q')$ et comme $Q, Q' \in K_i$ on a $Q = Q'$.

Maintenant supposons $I_Q \cap I_{Q'} = \emptyset$. Si $i \in I_Q, j \in I_{Q'}$ et $\Gamma \in A_Q = A_{Q'}$ on peut écrire $\text{cont}(\Gamma, C_i) = m(\Gamma) \cdot v(Q)$ et aussi $\text{cont}(\Gamma, C_j) = m(\Gamma) \cdot v(Q')$. Mais $\text{cont}(C_i, C_j) = \alpha_{ij} < n_i v(Q)$ et $\text{cont}(C_j, C_i) = \alpha_{ji} < n_j v(Q')$ (puisque sinon $i, j \in I_Q$ et $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$). Donc si $\text{cont}(\Gamma, C_i) \geq \text{cont}(\Gamma, C_j)$ alors

$$\text{cont}(C_j, C_i) \geq \text{cont}(\Gamma, C_j) \frac{n_j}{m(\Gamma)} = n_j v(Q')$$

et

$$\frac{\text{cont}(C_j, C_i)}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_i, C_j)}{n_i} \geq v(Q')$$

avec $Q' \in K_i \cap K_j$; ce qui est une contradiction. Ainsi le seul cas possible est $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$.

Alors la bijection est donnée par:

$$\begin{aligned} \sigma: \{Q \text{ sommet noir de } T(C)\} &\longrightarrow \{A_Q: Q \in T(C) \text{ noir}\} = \{\Gamma_l\}_l / R, \\ Q &\longrightarrow A_Q. \end{aligned}$$

Eggers montre dans [4] les deux propositions suivantes. La première proposition donne des résultats sur la multiplicité d'intersection d'une branche de la courbe polaire avec une branche de C , et avec la deuxième proposition Eggers calcule la multiplicité de chaque 'paquet' de la courbe polaire, c'est-à-dire de chacune des courbes $\Gamma^Q := \bigcup_{\Gamma_l \in A_Q} \Gamma_l$ de la courbe polaire $P(\tau)$. Dans les deux cas les données utilisées pour exprimer le résultat sont des invariants topologiques de C : la valuation, la position sur le diagramme, la quantité et le type des arêtes qui sortent du sommet Q de $T(C)$ associé à A_Q , c'est-à-dire des données contenues dans $T(C)$.

PROPOSITION 4.2 (Eggers [4]). *Soit Q un sommet noir de $T(C)$ et soit Γ_l un élément de A_Q .*

1. *Chaque branche C_i de C avec $i \in I_Q$ vérifie:*

(a) $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = n_i v(Q)$;

(b)

$$\frac{(C_i, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \begin{cases} \frac{\overline{\beta_{k+1}^i}}{n_1^i \dots n_k^i} & \text{si } Q \text{ est simple où } k = k(Q), \\ \min \left\{ \frac{(C_i, C_q)}{m(C_q)} \right\} & \text{si } Q \text{ est de bifurcation et } q \in I_Q - \{i\}. \end{cases}$$

2. *Chaque branche C_j de C telle que Q ne soit pas un élément de K_j vérifie:*

$$\text{cont}(C_j, \Gamma_l) = \text{cont}(C_j, C_i) \quad \text{pour } i \in I_Q,$$

$$\frac{(C_j, \Gamma_l)}{m(\Gamma_l)} = \frac{(C_j, C_i)}{m(C_i)}.$$

REMARQUE 4.1. Soit Q un sommet noir de $T(C)$ tel que $d_2(Q) > 0$. Le fait que l'arête qui sort de Q dans la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$ soit pleine équivaut à dire que la valuation de Q est égale à β_{k+1}^i/n_i où $k = k(Q)$.

DÉFINITION 4.1. Soit Q un sommet noir de $T(C)$ avec $k = k(Q)$. Notons I_Q^* le sous-ensemble de I_Q vérifiant:

$$I_Q^* = \begin{cases} I_Q & \text{si } d_2(Q) = 0, \\ \{i \in I_Q: v(Q) = \beta_{k+1}^i/n_i\} & \text{si } d_2(Q) > 0. \end{cases}$$

PROPOSITION 4.3 (Eggers [4]). Soient Q un sommet noir de $T(C)$ et $i \in I_Q^*$. On a:

$$\sum_{\Gamma_l \in A_Q} m(\Gamma_l) = n_1^i \dots n_k^i (d_1(Q) + d_2(Q)n_{k+1}^i - 1)$$

où $k := k(Q)$.

Nous attirons l'attention sur le fait suivant: le résultat de la proposition ci-dessus est indépendant du choix de l'indice i car si $i, j \in I_Q^*$ alors les $(k(Q) + 1)$ - premières paires caractéristiques de C_i et C_j coïncident d'après la valeur de leur contact.

5. Théorème principal de factorisation de la polaire

Le but de ce paragraphe est donner, à partir de la bijection σ de la proposition (4.1), une décomposition 'en paquets' $\{\Gamma^Q\}_{Q \in L}$ d'une courbe polaire générique $P(\tau)$ où L est l'ensemble de sommets noirs de $T(C)$ de telle façon que la valuation du sommet Q associée au 'paquet' $\Gamma^Q := \bigcup_{\Gamma_l \in \sigma(Q)} \Gamma_l$ permette non seulement de calculer les données (multiplicité à l'origine et contact avec les branches de la courbe C) du 'paquet' Γ^Q comme l'a déjà fait Eggers [4], mais aussi, à partir des résultats d'équisingularité de Zariski et Teissier [20, 14] d'exprimer les développements de Puiseux de branches de la courbe polaire à partir des développements de Puiseux de branches de la courbe C .

THÉORÈME 5.1. Soit $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ un germe réduit de courbe plane. Dans $U_\delta \times \mathbf{B}_{\epsilon(\delta)}$ les composantes irréductibles de $P(\tau)$ se rassemblent en l ensembles (que nous appellerons 'paquets') $\{\Gamma^{Q_j}(\tau)\}$ indexés par les sommets noirs $(Q_j)_{1 \leq j \leq l}$ de $T(C)$. De plus:

- (1) $m(\Gamma^{Q_j}) = n_1^{i_0} \dots n_q^{i_0} (d_1(Q_j) + d_2(Q_j)n_{q+1}^{i_0} - 1)$ où $k(Q_j) = q$ et $i_0 \in I_{Q_j}$;
- (2) toute composante irréductible Γ de Γ^{Q_j} a un développement de Puiseux de la forme:

$$\begin{cases} x = t^m, \\ y = a_{n_{i_0}} t^m + \dots + a_{sn_{i_0}} t^{sm} + a_{\beta_1^{i_0}} t^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \dots + a_{\beta_q^{i_0}} t^{\tilde{\beta}_q^{i_0}} + \dots \\ \quad + a_{n_{i_0}v(Q_j)-1} t^{m(n_{i_0}v(Q_j)-1)/n_{i_0}} + \sum_{s \geq mv(Q_j)} b_s(\tau) t^s, \end{cases}$$

où $m = m(\Gamma)$, t est un paramètre uniformisant, le tilde indique que les exposants ont été divisés par n_{i_0}/m et où $(a_{n_{i_0}}, \dots, a_{sn_{i_0}}, a_{\beta_1^{i_0}}, \dots, a_{\beta_q^{i_0}}, \dots, a_{n_{i_0}v(Q_j)-1})$

sont les coefficients d'un développement de Puiseux de C_{i_0} , jusqu'au terme $n_{i_0}v(Q_j) - 1$, et sont donc indépendants de τ pour toute valeur τ qui appartient à l'ouvert U d'équisingularité.

Remarquons que si $d_2(Q_j) > 0$ on doit prendre i_0 de telle façon que l'arête qui sort de Q_j dans la chaîne K_{i_0} vers un sommet noir de valuation plus grande, ou au sommet blanc est pleine.

De plus, le plus petit k tel que $b_k(\tau)$ puisse dépendre de τ est $k = mv(Q_j)$ si $mv(Q_j)$ est un nombre entier et dans le cas contraire $k = [mv(Q_j)] + 1$ où $[]$ dénote la partie entière.

Démonstration. Soit $P(\tau) = \bigcup_I \Gamma_I$ la décomposition de $P(\tau)$ en composantes irréductibles. Pour tout sommet noir Q définissons $\Gamma^Q := \bigcup_{\Gamma_q \in \sigma(Q)} \Gamma_q$ où σ est la correspondance bijective entre l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$ et l'ensemble des R -classes d'équivalence. D'après la proposition (4.1) et les propriétés des classes d'équivalences on a $P(\tau) = \bigcup_{Q \in L} \Gamma^Q$ où L est l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$. Soit $Q \in L$ avec $k(Q) = q$. Alors $\beta_q^i < n_i v(Q) \leq \beta_{q+1}^i$ (si $q = 0$ on peut avoir l'égalité $\beta_q^i = n_i v(Q)$) si le point base de $T(C)$ est de valuation égale à 1) pour tout $i \in I_Q$. Soit $i_0 \in I_Q^*$. D'après la proposition (4.3),

$$m(\Gamma^Q) = \sum_{\Gamma_I \in A_Q} m(\Gamma_I) = n_1^{i_0} \dots n_q^{i_0} (d_1(Q) + d_2(Q)n_{q+1}^{i_0} - 1).$$

De plus si $\Gamma \in \sigma(Q)$ alors $\text{cont}(C_{i_0}, \Gamma) = n_{i_0} v(Q)$. Ainsi il existe une paramétrisation y_{i_0} de C_{i_0} et une paramétrisation y_Γ de Γ telles que l'ordre maximum de coïncidence entre y_{i_0} et y_Γ soit $v(Q)$. Donc si

$$\begin{aligned} y_{i_0} &= a_{n_{i_0}} x + \dots + a_{sn_{i_0}} x^s + a_{\beta_1^{i_0}} x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{h_1} a_{\beta_1^{i_0} + j l_1^{i_0}} x^{(\beta_1^{i_0} + j l_1^{i_0})/n_{i_0}} + \dots + a_{\beta_{s_{i_0}}^{i_0}} x^{\beta_{s_{i_0}}^{i_0}/n_{i_0}} + \dots \end{aligned}$$

et $y_\Gamma = \sum_{s \geq m} b_s(\tau) x^{s/m}$ où $m := m(\Gamma)$ alors

$$\begin{aligned} y_\Gamma &= a_{n_{i_0}} x + \dots + a_{sn_{i_0}} x^s + a_{\beta_1^{i_0}} x^{\beta_1^{i_0}/n_{i_0}} + \dots + a_{\beta_q^{i_0}} x^{\beta_q^{i_0}/n_{i_0}} + \dots \\ &\quad + a_{n_{i_0}v(Q)-1} x^{(n_{i_0}v(Q)-1)/n_{i_0}} + \sum_{s/m \geq v(Q)} b_s(\tau) x^{s/m}. \end{aligned}$$

Ou bien, si t est un paramètre uniformisant, on peut écrire:

$$\begin{cases} x_\Gamma = t^m, \\ y_\Gamma = a_{n_{i_0}} t^m + \dots + a_{sn_{i_0}} t^{sm} + a_{\beta_1^{i_0}} t^{m\beta_1^{i_0}/n_{i_0}} + \dots + a_{\beta_q^{i_0}} t^{m\beta_q^{i_0}/n_{i_0}} + \dots \\ \quad + a_{n_{i_0}v(Q)-1} t^{(m(n_{i_0}v(Q)-1))/n_{i_0}} + \sum_{s \geq mv(Q)} b_s(\tau) t^s. \end{cases}$$

Si nous notons $\tilde{\beta}_i^{i_0} := \beta_i^{i_0} m / n_{i_0}$ et $\tilde{l}_i^{i_0} := m l_i^{i_0} / n_{i_0}$, la paramétrisation y_Γ sera:

$$\begin{cases} x_\Gamma = t^m, \\ y_\Gamma = a_{n_{i_0}} t^m + \dots + a_{sn_{i_0}} t^{sm} + a_{\beta_1^{i_0}} t^{\tilde{\beta}_1^{i_0}} + \dots + a_{\beta_q^{i_0}} t^{\tilde{\beta}_q^{i_0}} + \dots \\ \quad + a_{n_{i_0}v(Q)-1} t^{(m(n_{i_0}v(Q)-1))/n_{i_0}} + \sum_{s \geq mv(Q)} b_s(\tau) t^s. \end{cases}$$

Si $q = 0$ et $v(Q) = 1$ alors y_Γ et y_{i_0} n'ont pas de termes égaux. D'après la construction de la paramétrisation y_Γ et de la définition de contact, il est évident que tous les exposants qui apparaissent dans y_Γ sont entiers.

REMARQUE 5.1. Pour montrer le théorème ci-dessus nous n'avons utilisé que l'information contenue dans le diagramme d'Eggers de C et les paramétrisations des branches de la courbe C . Remarquez bien que les coefficients des paramétrisations dépendent du type analytique de la courbe C , mais les exposants ne dépendent que du diagramme d'Eggers de C , que lui-même ne dépend que de la classe d'équisingularité de la courbe C .

5.1. Quelques propriétés d'une branche d'un paquet donné

Soient Q un sommet noir de $T(C)$ et Γ^Q le paquet de la courbe polaire $P(\tau)$ associé à Q . Si $k := k(Q) \geq 1$ et $i \in I_Q$ alors

$$\frac{\beta_k^i}{m(C_i)} < v(Q) \leq \frac{\beta_{k+1}^i}{m(C_i)}. \quad (6)$$

L'inégalité (6) est aussi vraie pour $k := k(Q) = 0$ s'il n'existe pas de sommet noir de valuation 1 dans $T(C)$. Ainsi, si Γ est une branche de Γ^Q , alors $\text{cont}(C_i, \Gamma) = n_i v(Q)$, c'est-à-dire $\beta_k^i < \text{cont}(C_i, \Gamma) \leq \beta_{k+1}^i$ et d'après les propriétés du contact et la définition de $T(C)$, on a :

$$(m_j^i, n_j^i) = (m_j(\Gamma), n_j(\Gamma)) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k,$$

où $(m_j(\Gamma), n_j(\Gamma))$ est la j -ième paire caractéristique de la branche Γ de Γ^Q . Donc les $k+1$ premiers exposants caractéristiques de Γ sont $\{\tilde{\beta}_0^i, \dots, \tilde{\beta}_k^i\}$ où $k = k(Q)$, $i \in I_Q^*$ et $\tilde{x} = mx/n_i$ pour tout x et où $m := m(\Gamma)$. De plus $l_j(\Gamma) := \text{p.g.c.d.}(\tilde{\beta}_0^i, \dots, \tilde{\beta}_j^i) = m l_j^i / n_i$ pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$.

Attirons l'attention sur le fait suivant: bien que l'ensemble $\{(m_j(\Gamma), n_j(\Gamma))\}_{j=1}^k$ des paires caractéristiques soit indépendant de la branche Γ de Γ^Q choisie, le nombre $l_j(\Gamma)$ avec $1 \leq j \leq k$ dépend de la branche Γ choisie puisque toutes les branches d'un même paquet n'ont pas nécessairement la même multiplicité.

REMARQUE 5.2. En général si Γ est une branche de Γ^Q avec $k = k(Q)$ alors $l_k(\Gamma) > 1$ comme on voit dans l'exemple suivant. Soit C la courbe irréductible d'équation $(y^3 - x^4)^3 - x^3 y^7 = 0$. Les exposants caractéristiques de C sont $\{9, 12, 13\}$, donc sa courbe polaire $P(\tau)$ est décomposée en deux paquets, dans ce cas-là irréductibles. Le paquet Γ^Q avec $v(Q) = \frac{13}{9}$ est une branche d'exposants caractéristiques $\{6, 8, 9\}$, donc $l_1(\Gamma^Q) = 2 > 1$. Ainsi la branche Γ^Q a deux paires caractéristiques comme la branche de départ C .

Cependant si $l_k(\Gamma) = 1$, on peut déterminer complètement toutes les paires caractéristiques de Γ à partir du lemme ci-dessus et on peut donc calculer sa multiplicité à l'origine puisque $m(\Gamma) = n_1(\Gamma) \dots n_k(\Gamma) l_k(\Gamma) = n_1^i \dots n_k^i$. De plus, si Γ est une branche de Γ^Q et $k(Q) \geq 1$ alors $m(\Gamma) \geq 2$, car $n_k^i \geq 2$ pour tout k . Ainsi les branches lisses de $P(\tau)$ appartiennent aux paquets Γ^Q où $k(Q) = 0$.

LEMME 5.1. Soit Q un sommet noir du diagramme d'Eggers tel que $v(Q) = \beta_k^i/n_i$ où C_i est une branche de C . Alors pour toute branche Γ du paquet Γ^Q on a:

$$\frac{\beta_k^i}{n_i} \leq \frac{\beta_k(\Gamma)}{m(\Gamma)}$$

où $\beta_k(\Gamma)$ est le k -ième exposant caractéristique de Γ .

De plus, si le sommet Q est simple alors $\beta_k^i/n_i < \beta_k(\Gamma)/m(\Gamma)$.

Démonstration. Supposons que

$$\frac{\beta_k(\Gamma)}{m(\Gamma)} < \frac{\beta_k^i}{n_i} = \frac{\text{cont}(C_i, \Gamma)}{n_i},$$

donc $\beta_k(\Gamma)/m(\Gamma)$ apparaît dans le développement de Puiseux de C_i et de plus

$$\frac{\beta_{k-1}^i}{n_i} = \frac{\beta_{k-1}(\Gamma)}{m(\Gamma)} < \frac{\beta_k(\Gamma)}{m(\Gamma)} < \frac{\beta_k^i}{n_i}.$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que l_{k-1}^i divise λ et $\beta_k(\Gamma)/m(\Gamma) = (\beta_{k-1}^i + \lambda)/n_i$, donc il existe $\lambda_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\beta_k(\Gamma)}{m(\Gamma)} = \frac{m_{k-1}^i + \lambda_1}{n_1^i \dots n_{k-1}^i} = \frac{m_{k-1}(\Gamma) + \lambda_1}{n_1(\Gamma) \dots n_{k-1}(\Gamma)} = \frac{\beta_{k-1}(\Gamma) + \lambda_1 l_{k-1}(\Gamma)}{m(\Gamma)}.$$

Donc $\beta_k(\Gamma) = \beta_{k-1}(\Gamma) + \lambda_1 l_{k-1}(\Gamma)$, c'est-à-dire que $l_{k-1}(\Gamma)$ divise $\beta_k(\Gamma)$ ce qui est une contradiction.

Maintenant si Q est un sommet simple et si nous supposons que $\beta_k^i/n_i = \beta_k(\Gamma)/m(\Gamma)$ alors $(m_r^i, n_r^i) = (m_r(\Gamma), n_r(\Gamma))$ pour tout $1 \leq r \leq k$. Donc $m(\Gamma) = n_1(\Gamma) \dots n_k(\Gamma) l_k(\Gamma) = n_1^i \dots n_k^i l_k(\Gamma) \geq n_1^i \dots n_k^i$. D'autre part

$$m(\Gamma) \leq m(\Gamma^Q) = n_1^i \dots n_{k-1}^i (n_k^i - 1) < n_1^i \dots n_k^i,$$

ce qui donne une contradiction.

PROPOSITION 5.1. Soient Q un sommet noir simple de $T(C)$ et Γ une branche du paquet Γ^Q .

(1) Si Q est simple alors dans le développement de y de la branche Γ le terme $t^{m(\Gamma)v(Q)}$ n'apparaît pas.

(2) Si $d_1(Q) = d_2(Q) = 1$, $v(Q) = \beta_k^i/n_i$ et le terme $t^{m(\Gamma)v(Q)}$ apparaît dans le développement de y de la branche Γ alors le paquet Γ^Q est irréductible.

Démonstration. (1) Comme Q est un sommet simple de $T(C)$ il existe une branche C_i de C et $k \in \{1, \dots, g_i\}$ tels que $v(Q) = \beta_k^i/n_i$. Supposons que le terme $t^{m(\Gamma)v(Q)}$ apparaît dans le développement de y de Γ avec $m = m(\Gamma)$. Alors $mv(Q) = m\beta_k^i/n_i$ est un nombre entier. D'après le lemme ci-dessus $mv(Q) = m\beta_k^i/n_i < \beta_k(\Gamma)$, donc $l_{k-1}(\Gamma)$ divise $mv(Q)$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $m\beta_k^i/n_i = \lambda l_{k-1}(\Gamma)$ donc β_k^i/l_{k-1}^i est un nombre entier, ce qui est une contradiction.

(2) Comme le terme $t^{m(\Gamma)v(Q)}$ apparaît dans le développement de y de Γ où

$m = m(\Gamma)$ alors $mv(Q) = m\beta_k^i/n_i$ est un nombre entier, donc

$$\frac{m_k^i m}{n_1^i \dots n_k^i} = \frac{m_k^i l_{k-1}(\Gamma)}{n_k^i}$$

est un nombre entier. Mais p.g.c.d. $(m_k^i, n_k^i) = 1$ donc n_k^i divise $l_{k-1}(\Gamma)$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $l_{k-1}(\Gamma) = \lambda n_k^i$. Cependant, $m(\Gamma) = n_1^i \dots n_{k-1}^i l_{k-1}(\Gamma) \leq m(\Gamma^Q) = n_1^i \dots n_k^i$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $m(\Gamma) = m(\Gamma^Q)$ et le paquet Γ^Q est irréductible.

Le résultat (1) se trouve déjà dans [13] et [17] dans le cas où C est irréductible.

5.2. Quelques propriétés des paquets $\{\Gamma^Q\}_{Q \in L}$ de la courbe polaire

Nous allons maintenant démontrer quelques résultats sur la relation entre la multiplicité des paquets de la courbe polaire $P(\tau)$ et la multiplicité des branches de la courbe C .

PROPOSITION 5.2. *Soit Q un sommet noir de $T(C)$. On a:*

- (1) $m(\Gamma^Q) < \sum_{i \in I_Q} m(C_i)$;
- (2) si Q est simple alors $m(\Gamma^Q) < m(C_i)$ pour toute branche C_i de C telle que $i \in I_Q$.

Démonstration. (1) Si $k = k(Q)$ alors $v(Q) \leq \beta_{k+1}^i/n_i$ pour toute branche C_i de C telle que $i \in I_Q$. De plus

$$\begin{aligned} M &:= \{C_i: i \in I_Q\} \\ &= \{C_i: v(Q) = \beta_{k+1}^i/n_i\} \cup \{C_i: v(Q) < \beta_{k+1}^i/n_i\} \\ &=: M_1 \cup M_2. \end{aligned}$$

Mais si $C_i \in M_1$ (si $M_1 = \emptyset$ alors $d_2(Q) = 0$ et il suffit prendre $C_i \in M_2$) alors

$$\begin{aligned} m(\Gamma^Q) &= n_1^i \dots n_k^i (d_1(Q) + d_2(Q)n_{k+1}^i - 1) \\ &= (d_1(Q) - 1)n_1^i \dots n_k^i + d_2(Q)n_1^i \dots n_{k+1}^i \\ &< (\#M_2)n_1^i \dots n_k^i + (\#M_1)n_1^i \dots n_{k+1}^i \\ &= \sum_{i \in M_2} n_1^i \dots n_k^i + \sum_{i \in M_1} n_1^i \dots n_{k+1}^i \\ &\leq \sum_{i \in M_2} n_1^i \dots n_{g_i}^i + \sum_{i \in M_1} n_1^i \dots n_{g_i}^i \\ &= \sum_{i \in M_2} m(C_i) + \sum_{i \in M_1} m(C_i) = \sum_{i \in I_Q} m(C_i). \end{aligned}$$

(2) Soit C_i une branche de C telle que $i \in I_Q$. Comme Q est simple on a $v(Q) = \beta_{k+1}^i/n_i$ où $k = k(Q)$, $d_1(Q) = 0$ et $d_2(Q) = 1$, donc

$$m(\Gamma^Q) = n_1^i \dots n_k^i (n_{k+1}^i - 1) < n_1^i \dots n_{k+1}^i \leq n_1^i \dots n_{g_i}^i = m(C_i).$$

REMARQUE 5.3. D'après la première partie du théorème 5.1 on peut donner

une borne pour le nombre de branches de la courbe polaire qui forment le paquet Γ^Q . Plus précisément si on dénote L le nombre de branches de la courbe polaire qui sont dans le paquet Γ^Q associé au sommet Q alors on a $L < d_1(Q) + d_2(Q)n_{k+1}^i$ où $k := k(Q)$. Ainsi, si Q est simple on a $L < n_{k+1}^i$, et si $d_2(Q) = 0$ le nombre de branches de la courbe polaire qui sont dans le paquet associé au sommet Q est majoré par le nombre de branches C_j de C qui vérifient $\text{cont}(C_i, C_j) = n_i v(Q)$. Cela nous permet de déterminer, dans quelques cas, que le paquet Γ^Q de la courbe polaire est irréductible:

- (1) si Q est un sommet noir de $T(C)$ tel que $d_2(Q) = 0$ et $d_1(Q) = 2$ alors le paquet Γ^Q de la courbe polaire est irréductible;
- (2) si Q est un sommet simple de $T(C)$, $i \in I_Q$ et $n_{k+1}^i = 2$ alors le paquet Γ^Q de la courbe polaire est irréductible.

5.3. Exemple optimal

Le théorème 5.1 de décomposition de la courbe polaire est optimal si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, comme le montre l'exemple suivant. Soit la courbe $C \equiv f = f_1 \cdot f_2 = 0$ où $f_1(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9$ et $f_2(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7$.

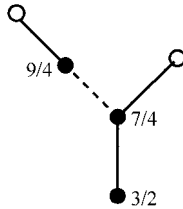
Les développements de Puiseux de $f_1(x, y) = 0$ sont

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{9/4}, \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{9/4}, \\ y_3 = x^{3/2} - x^{9/4}, \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{9/4}, \end{cases}$$

et les développements de Puiseux de $f_2(x, y) = 0$ sont

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{7/4}, \\ y_2 = -x^{3/2} + ix^{7/4}, \\ y_3 = x^{3/2} - x^{7/4}, \\ y_4 = -x^{3/2} - ix^{7/4}. \end{cases}$$

Donc $S_1^1 \cup S_1^2 = \{\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\} \cup \{\frac{7}{4}\}$ et $S_2^1 \cup S_2^2 = \{\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\} \cup \{\frac{7}{4}\}$. Le diagramme d'EGGERS de C est



Si on calcule les différentes branches de $P(\tau)$ on a

$$P(\tau) = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} \cup \Gamma^{(3)}$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)} &\equiv y = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\tau\right)x^2 + \left(-\frac{37}{64} - \frac{3}{4}\tau - \frac{39}{16}\tau^2\right)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{13}{1024} + \frac{923}{256}\tau - \frac{663}{128}\tau^2 + \frac{33}{64}\tau^3 - \frac{351}{64}\tau^4\right)x^4 + \dots, \\
\Gamma^{(2)} &\equiv y_1 = x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17}{256}x^{9/4} + \left(-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau\right)x^{5/2} + \dots, \\
&\quad y_2 = -x^{3/2} - \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{17i}{256}x^{9/4} - \left(-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau\right)x^{5/2} + \dots, \\
&\quad y_3 = x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17}{256}x^{9/4} + \left(-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau\right)x^{5/2} + \dots, \\
&\quad y_4 = -x^{3/2} + \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{1}{16}x^2 - \frac{17i}{256}x^{9/4} - \left(-\frac{11}{256} + \frac{13}{32}\tau\right)x^{5/2} + \dots, \\
\Gamma^{(3)} &\equiv y_1 = x^{3/2} + x^3 + \left(-\frac{1}{4} + 7\tau\right)x^{7/2} + \left(-\frac{15}{8} + \frac{1}{8}\tau + \frac{21}{2}\tau^2\right)x^4 \\
&\quad + \frac{1}{16}(252\tau^3 + 3\tau^2 - 225\tau - 7)x^{9/2} \dots, \\
&\quad y_2 = -x^{3/2} + x^3 - \left(-\frac{1}{4} + 7\tau\right)x^{7/2} + \left(-\frac{15}{8} + \frac{1}{8}\tau + \frac{21}{2}\tau^2\right)x^4 \\
&\quad - \frac{1}{16}(252\tau^3 + 3\tau^2 - 225\tau - 7)x^{9/2} \dots.
\end{aligned}$$

On doit remarquer que dans le paquet $\Gamma^{(1)}$, d'après le théorème (5.1), le premier terme qui peut apparaître après le contact dépend de τ . Ceci montre que le résultat du théorème (5.1) est optimal.

6. Invariants polaires partiels et topologie

Ce paragraphe est consacré à l'étude des invariants polaires qui sont associés à la courbe C . D'abord on calcule les invariants polaires introduits par B. Teissier; ces sont les inclinaisons des côtés du polygone de Newton jacobien défini dans [16]. On sait bien d'après [9], dans le cas irréductible, que ces invariants ne dépendent que de la topologie de C et la déterminent. Cependant ils ne sont pas suffisants pour déterminer le type topologique de C quand C est une courbe réduite non irréductible (voir [4]). Ici nous utilisons le concept d'invariant polaire partiel [4] qui va nous permettre d'associer à la courbe C de composantes irréductibles $\{C_i\}_{i=1}^r$ une matrice. Cette matrice sera appelée matrice des invariants polaires partiels. Nous montrerons qu'elle ne dépend que de la topologie de la courbe C et la détermine complètement si nous connaissons de plus la multiplicité à l'origine de chaque branche C_i de C .

6.1. Calcul des invariants polaires

Le but de ce paragraphe est calculer, pour le cas particulier d'un germe de courbe plane réduite C , les *invariants polaires* introduits par B. Teissier dans [14]. On rappelle que si $P(\tau)$ est une courbe polaire générique de C et $\bigcup_l \Gamma_l$ est sa décomposition en composantes irréductibles alors l'ensemble des invariants polaires de C coïncide avec $\{\epsilon(\Gamma_l) := (e_l + m_l)/m_l\}_l$ où $m_l := m(\Gamma_l)$ et $e_l + m_l := (C, \Gamma_l)$.

DÉFINITION 6.1. Soit Γ une composante irréductible de la courbe polaire $P(\tau)$. Le nombre

$$\epsilon_i(\Gamma) = \frac{(C_i, \Gamma)}{m(\Gamma)}$$

est appelé *invariant polaire partiel* de Γ par rapport à la branche C_i de C .

L'invariant polaire 'classique' $\epsilon(\Gamma)$ de Γ , définie par Teissier [14] est égal à $\sum_{i=1}^r \epsilon_i(\Gamma)$ où r est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C . D'après la définition de la relation d'équivalence R , deux branches Γ et Γ' de la courbe polaire $P(\tau)$ sont R -équivalentes si et seulement si $\epsilon_i(\Gamma) = \epsilon_i(\Gamma')$ pour toute branche C_i de C . Ainsi nous pouvons associer à la R -classe d'équivalence $[\Gamma]$ de la branche Γ de la courbe polaire le nombre $\epsilon_i([\Gamma]) := \epsilon_i(\Gamma)$. Ceci va nous permettre associer à chaque paquet Γ^Q le nombre $\epsilon_i(\Gamma^Q) := \epsilon_i(\sigma^{-1}(Q))$, où σ est la correspondance bijective entre l'ensemble des R -classes d'équivalence et l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$.

D'après l'égalité $\epsilon(\Gamma) = \sum_{i=1}^r \epsilon_i(\Gamma)$, toutes les branches de la courbe polaire qui appartient aux même paquet Γ^Q ont le même invariant polaire classique, et on peut associer à chaque paquet Γ^Q le nombre $\epsilon(\Gamma^Q)$ qui coïncide avec l'invariant polaire d'une branche quelconque Γ de Γ^Q . Le réciproque n'est pas vraie en général. Il suffit de prendre $C = C_1 \cup C_2$ où C_1 et C_2 sont équisingulières et telles que $\alpha := \text{cont}(C_1, C_2) < \beta_{g_1}^1$. Si $\beta_k^1 \leq \alpha < \beta_{k+1}^1$ alors il y aura au moins deux sommets différents Q_{k+1}^1 et Q_{k+1}^2 de $T(C)$ tels que si Γ est une branche du paquet $\Gamma^{Q_{k+1}^1}$ et Φ est une branche du paquet $\Gamma^{Q_{k+1}^2}$, alors Γ et Φ ont le même invariant polaire mais ne sont pas R -équivalentes.

LEMME 6.1. *Si Q est un sommet noir de $T(C)$ tel que $Q \in K_i$ alors*

$$\epsilon_i(\Gamma^Q) = \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q) - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i}$$

où $k := k(Q)$.

Démonstration. Cela résulte de la définition du paquet Γ^Q et de la proposition (2.1).

COROLLAIRE 6.1. *Si Q est un sommet noir du diagramme d'Eggers de la courbe C alors*

$$\epsilon(\Gamma^Q) = \sum_{i \in I_Q} \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q) - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i} + \sum_{i \notin I_Q} \frac{(C_i, C_{i_0})}{m(C_{i_0})}$$

où $k = k(Q)$ et $i_0 \in I_Q$.

On obtient, comme corollaire, le résultat suivant qui est bien connu d'après [16].

COROLLAIRE 6.2. *Les invariants polaires de C ne dépendent que du type topologique de la courbe C .*

PROPOSITION 6.1. *Soient Q et Q' deux sommets noirs de la chaîne élémentaire K_i de C . Si $v(Q) < v(Q')$ alors $\epsilon_i(\Gamma^Q) < \epsilon_i(\Gamma^{Q'})$.*

Démonstration. Soit $\{Q_1, \dots, Q_s\}$ l'ensemble ordonné (c'est-à-dire $Q < Q'$ si et seulement si $v(Q) < v(Q')$) de la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$. Il faut montrer que $\epsilon_i(\Gamma^{Q_j}) < \epsilon_i(\Gamma^{Q_{j+1}})$ pour tout $j \in \{1, \dots, s-1\}$.

Si $k(Q_j) = k(Q_{j+1}) =: k$ alors

$$\epsilon_i(\Gamma^{Q_j}) = \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q_j) - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i} < \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q_{j+1}) - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i} = \epsilon_i(\Gamma^{Q_{j+1}})$$

car $v(Q_j) < v(Q_{j+1})$.

Si $k := k(Q_j) < k(Q_{j+1})$ alors $k(Q_{j+1}) = k + 1$ et $v(Q_j) = \beta_{k+1}^i / n_i$ donc

$$\begin{aligned} \epsilon_i(\Gamma^{Q_j}) &= \frac{\overline{\beta_{k+1}^i}}{n_1^i \dots n_k^i} = \frac{n_{k+1}^i \overline{\beta_{k+1}^i}}{n_1^i \dots n_{k+1}^i} \\ &< \frac{n_{k+1}^i \overline{\beta_{k+1}^i} + n_i v(Q_{j+1}) - \beta_{k+1}^i}{n_1^i \dots n_{k+1}^i} \\ &= \epsilon_i(\Gamma^{Q_{j+1}}) \end{aligned}$$

car $n_i v(Q_{j+1}) > n_i v(Q_j) = \beta_{k+1}^i$.

COROLLAIRE 6.3. Soient Q et Q' deux sommets noirs de $T(C)$ appartenant à une même chaîne élémentaire du diagramme d' Eggers. Si $v(Q) < v(Q')$ alors $\epsilon(\Gamma^Q) < \epsilon(\Gamma^{Q'})$.

COROLLAIRE 6.4. On a :

- (1) $\inf_{Q \in T(C)} \{\epsilon(\Gamma^Q)\} = \epsilon(\Gamma^{Q_0})$ où Q_0 est le point base de $T(C)$;
- (2) $\sup_{Q \in T(C)} \{\epsilon(\Gamma^Q)\} = \sup_{Q_i} \{\epsilon(\Gamma^{Q_i})\}$ où Q_i est le sommet noir de valuation la plus grande appartenant à la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$.

REMARQUE 6.1. Rappelons que les plus petits exposants θ_1 et θ_2 tels qu'il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^2 et des constantes D_1 et D_2 tels que l'on ait les inégalités de Łojasiewicz $|\text{grad} f(z)| \geq D_1 |f(z)|^{\theta_1}$ et $|\text{grad} f(z)| \geq D_2 |z|^{\theta_2}$, respectivement, sont appelés *exposants de Łojasiewicz* du gradient de la courbe C .

D'après le corollaire ci-dessus et le corollaire 2 de [16, p. 270] on peut calculer ces exposants de Łojasiewicz pour une courbe réduite plane C . Plus précisément si $\rho = \sup_{Q_i} \{\epsilon(\Gamma^{Q_i})\}$ où Q_i est le sommet noir de valuation la plus grande appartenant à la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$, alors $\theta_1 = \rho / (\rho + 1)$ et $\theta_2 = \rho$. Ainsi, d'après le corollaire à la Kuiper–Kuo de [16, p. 281], si $f = f_n + f_{n+1} + \dots$ est la décomposition de f en composantes homogènes alors f et $F := f_n + f_{n+1} + \dots + f_{\lceil \rho \rceil + 1}$ ont le même type topologique et de plus $\lceil \rho \rceil$ est le plus petit entier q tel que si $g - f$ est d'ordre supérieur ou égal à $q + 1$ alors g a le même type topologique que f . La proposition suivante permet de calculer explicitement la valeur de ρ (et en conséquence les valeurs de θ_1 et θ_2) en fonction de la topologie de C .

PROPOSITION 6.2. 1. Soient Q et Q' deux sommets noirs de la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$. Alors :

$$Q = Q' \iff \epsilon_i(\sigma(Q)) = \epsilon_i(\sigma(Q')).$$

2. Si Q est un sommet noir de $T(C) - K_i$ alors $\epsilon_i(\sigma(Q)) = \epsilon_i(\sigma(S))$ où S est le sommet de valuation la plus grande du graphe partiel K_{ij} des branches C_i et C_j avec $Q \in K_j$.

Démonstration. Si $Q, Q' \in K_i$ alors

$$Q = Q' \iff \sigma(Q) = \sigma(Q') \iff \epsilon_i(\sigma(Q)) = \epsilon_i(\sigma(Q')).$$

Maintenant si Q un sommet noir de $T(C) - K_i$ et $\gamma \in \sigma(Q)$ alors $\text{cont}(C_i, \gamma) = \text{cont}(C_i, C_j)$ où $j \in I_Q$; donc $\text{cont}(C_i, \gamma) = n_i v(S)$ où S est le sommet de valuation la plus grande du graphe partiel K_{ij} des branches C_i et C_j . Ainsi $(C_i, \gamma)/m(\gamma) = (C_i, \Gamma)/m(\Gamma)$ où $\Gamma \in \sigma(S)$ et alors $\epsilon_i(\sigma(Q)) = \epsilon_i(\gamma) = \epsilon_i(\Gamma) = \epsilon_i(\sigma(S))$.

COROLLAIRE 6.5. *Les invariants polaires partiels ne dépendent que du type topologique de la courbe C .*

Démonstration. Il est évident d'après la proposition ci-dessus et le lemme 6.1.

6.2. La matrice des invariants polaires partiels

Le but de ce paragraphe est d'introduire le concept de *matrice des invariants polaires partiels* et d'interpréter le théorème de décomposition de la courbe polaire à partir de cette matrice.

DÉFINITION 6.2. Soit C_i une branche de C . La suite $\mathcal{S}_i = (\epsilon_i([\Gamma]))_{[\Gamma]}$ est appelée *suite des invariants polaires partiels associés à la branche C_i de C .*

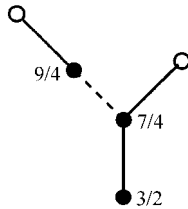
La longueur de la suite \mathcal{S}_i coïncide avec la cardinalité de l'ensemble des R -classes d'équivalence qui est exactement le nombre des paquets $\{\Gamma^Q\}_Q$ de la courbe polaire. Donc la longueur de \mathcal{S}_i est égale au nombre des sommets noirs du diagramme d'Eggers de C ; elle est indépendante de la branche C_i . Notons a la longueur commune des suites $\{\mathcal{S}_i\}_i$.

DÉFINITION 6.3. On appelle *matrice des invariants polaires partiels de la courbe C* la matrice $\mathcal{M} = (m_{ij})$ de taille $r \times a$ où $m_{ij} = \epsilon_i([\Gamma_j])$ et $\{[\Gamma_j]\}_{j=1}^a$ est l'ensemble des R -classes d'équivalence.

D'après la définition de la matrice \mathcal{M} la i -ième ligne de \mathcal{M} coïncide avec la suite \mathcal{S}_i . De plus le nombre des colonnes de \mathcal{M} est égal au nombre des sommets noirs du diagramme d'Eggers $T(C)$ de C et le nombre des lignes de \mathcal{M} coïncide avec le nombre des sommets blancs de $T(C)$.

On va voir maintenant un exemple.

EXEMPLE 6.1. Soit C une courbe à deux branches avec le diagramme d'Eggers suivant:

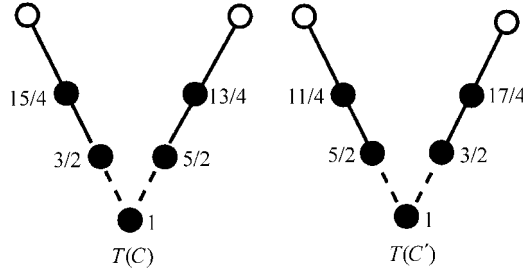


Alors les suites des invariants polaires partiels de C_1 et C_2 sont $\mathcal{S}_1 = (6, \frac{13}{2}, \frac{15}{2})$ et $\mathcal{S}_2 = (6, \frac{13}{2}, \frac{13}{2})$, donc la matrice de taille 2×3 des invariants polaires partiels de la courbe C est la suivante:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{2} & \frac{15}{2} \\ 6 & \frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } a = 3.$$

6.3. La matrice des invariants polaires partiels détermine le diagramme d'Eggers

Il est bien connu [9] que si C est une branche on peut retrouver la topologie de C à partir des invariants polaires de C et de sa multiplicité à l'origine, et cependant si C est une courbe réduite non irréductible alors les invariants polaires de C et sa multiplicité ne sont pas suffisants pour calculer sa topologie, comme Eggers montre avec l'exemple suivant [4]:



Les deux courbes C et C' ont le même ensemble des invariants polaires: $\{8, 10, \frac{29}{2}, 14, \frac{31}{2}\}$, mais C et C' ne sont pas équisingulières car $T(C) \neq T(C')$.

Le but de ce paragraphe est calculer le diagramme d'Eggers, et donc la topologie de C à partir de la matrice des invariants polaires partiels \mathcal{M} et des multiplicités des branches de la courbe C . L'idée est de dessiner la chaîne élémentaire K_i de la branche C_i et déterminer ses sommets de bifurcation à partir de la suite \mathcal{S}_i . Une fois déterminé ainsi le squelette du diagramme d'Eggers $T(C)$ de C , on calculera la valuation de chaque sommet noir.

PROPOSITION 6.3. *Le nombre des sommets noirs de la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$ est égal au nombre d'éléments distincts de la suite \mathcal{S}_i .*

Démonstration. D'après la proposition (6.2) on a que, si $Q, Q' \in K_i$ avec $Q \neq Q'$ alors $\epsilon_i(\sigma(Q)) \neq \epsilon_i(\sigma(Q'))$, et si $P \in T(C) - K_i$ alors il existe $S \in K_i$ tel que $\epsilon_i(\sigma(P)) = \epsilon_i(\sigma(S))$. Donc le nombre des sommets noirs de K_i coïncide avec la cardinalité de l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{\epsilon_i([\Gamma]): [\Gamma] \text{ est une } R\text{-classe d'équivalence}\}.$$

REMARQUE 6.2. Chaque suite $\mathcal{S}_i = (\epsilon_i([\Gamma]))_{[\Gamma]}$ détermine un ensemble $\mathcal{A}_i = \{\epsilon_i([\Gamma])\}$ de nombres rationnels. La suite \mathcal{S}_i peut contenir des éléments égaux mais dans l'ensemble \mathcal{A}_i tous les éléments sont différents; la longueur a de la suite \mathcal{S}_i est supérieure ou égale à la cardinalité $\#\mathcal{A}_i$ de l'ensemble \mathcal{A}_i . Si $z \in \mathcal{A}_i$ nous appelons multiplicité de z le nombre de fois que z apparaît comme élément de la suite \mathcal{S}_i .

COROLLAIRE 6.6. *Il existe une correspondance bijective ρ_i entre l'ensemble \mathcal{A}_i et l'ensemble des sommets noirs de la chaîne élémentaire K_i de C_i dans le diagramme d'Eggers de la courbe C .*

REMARQUE 6.3. D'après le corollaire ci-dessus nous pouvons ordonner les sommets noirs de la chaîne élémentaire K_i à partir de l'ordre induit par \mathbb{Q} dans l'ensemble \mathcal{A}_i de la façon suivante:

$$Q \leq Q' \iff \rho_i^{-1}(Q) \leq \rho_i^{-1}(Q').$$

PROPOSITION 6.4. *Le nombre des sommets noirs de $T(C)$ qui n'appartiennent pas à la chaîne élémentaire K_i de C_i est $a - \#\mathcal{A}_i$ où a est la longueur de la suite \mathcal{S}_i .*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition ci-dessus et de la proposition (6.2).

PROPOSITION 6.5. *Si p est un élément de \mathcal{A}_i de multiplicité plus grande que 1 alors le sommet $\rho_i(p)$ de la chaîne élémentaire K_i de C_i est un sommet de bifurcation.*

Démonstration. Soit $A = \{[\Gamma]: \epsilon_i([\Gamma]) = p\}$. La cardinalité de A est égale à la multiplicité de p comme élément de la suite \mathcal{S}_i , qui est plus grande que 1. D'après la proposition (6.2), le sommet $\rho_i(p)$ est donc de bifurcation.

Ainsi nous pouvons déterminer le nombre des sommets noirs que contient chaque chaîne élémentaire K_i de $T(C)$ et le nombre des sommets noirs qui sont dans $T(C) - K_i$ à partir de la matrice \mathcal{M} . De plus avec la proposition ci-dessus nous pouvons déterminer les sommets de bifurcation de chaque chaîne élémentaire K_i . Avec toutes ces données nous savons le sommet où sont séparées deux chaînes élémentaires, c'est-à-dire, nous pouvons dessiner le squelette du diagramme $T(C)$ et en particulier le squelette de chaque chaîne élémentaire K_i de $T(C)$.

Il reste à calculer la valuation de chaque sommet de $T(C)$ et, étant données deux sommets consécutifs Q et Q' avec Q un sommet de bifurcation, déterminer si l'arête qui les relie est pleine ou discontinue, car avec ces données nous avons complété totalement le dessin du diagramme d'Eggers de la courbe. Pour finir de construire le diagramme il suffit de compléter les valuations des sommets noirs de chaque chaîne élémentaire et les arêtes qui joindrent les sommets car nous avons déjà, avec le squelette que nous venons de construire, où sont séparées les différents chaînes élémentaires.

Nous avons besoin des deux lemmes suivants.

LEMME 6.2. *Soit Q un sommet noir de $T(C)$; alors*

$$d_2(Q) = 0 \iff n_1^i n_2^i \dots n_k^i v(Q) \in \mathbb{N}$$

pour tout $i \in I_Q$ et où $k = k(Q)$.

Démonstration. Supposons que $d_2(Q) > 0$, alors il existe $i \in I_Q$ tel que $v(Q) = \beta_{k+1}^i / n_i$, donc il existe $i \in I_Q$ tel que $n_i \cdot v(Q) = n_1^i \dots n_k^i l_k^i v(Q) = \beta_{k+1}^i$ et alors $n_1^i n_2^i \dots n_k^i v(Q) = \beta_{k+1}^i / l_k^i \in \mathbb{N}$ ce qui est une contradiction.

Maintenant si $d_2(Q) = 0$ alors $\beta_k^i < n_i v(Q) < \beta_{k+1}^i$ pour tout $i \in I_Q$, donc

$$(m_l^i, n_l^i) = (m_l^j, n_l^j) \quad \text{pour } 1 \leq l \leq k, \quad (7)$$

pour tous $i, j \in I_Q$. De plus il existe $i_0 \in I_Q$ tel que $n_{i_0} v(Q)$ apparaît dans le développement de Puiseux de la branche C_{i_0} et comme $\beta_k^{i_0} < n_{i_0} v(Q) < \beta_{k+1}^{i_0}$ alors $l_k^{i_0}$ divise $n_{i_0} v(Q)$, c'est-à-dire $n_{i_0} v(Q) = \lambda l_k^{i_0}$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$. Donc $n_1^{i_0} \dots n_k^{i_0} l_k^{i_0} v(Q) = \lambda l_k^{i_0}$ et $n_1^{i_0} \dots n_k^{i_0} v(Q) \in \mathbb{N}$ et d'après (7) on a $n_1^i \dots n_k^i v(Q) \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I_Q$.

LEMME 6.3. Soient Q et Q' deux sommets consécutifs de la chaîne élémentaire K_i de C_i avec $v(Q) < v(Q')$. On a:

$$\epsilon_i(\sigma(Q')) - \epsilon_i(\sigma(Q)) = \frac{n_i[v(Q') - v(Q)]}{n_1^i \dots n_k^i} \quad (8)$$

où $k = k(Q')$.

Démonstration. Soient $\Gamma \in \sigma(Q)$ et $\Gamma' \in \sigma(Q')$. Deux cas sont possibles.

1: $k(Q') = k(Q) =: k$. D'après la proposition (2.1):

$$\epsilon_i(\sigma(Q)) = \frac{(C_i, \Gamma)}{m(\Gamma)} = \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q) - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i}$$

et

$$\epsilon_i(\sigma(Q')) = \frac{(C_i, \Gamma')}{m(\Gamma')} = \frac{n_k^i \overline{\beta_k^i} + n_i v(Q') - \beta_k^i}{n_1^i \dots n_k^i}$$

donc

$$\epsilon_i(Q') - \epsilon_i(Q) = \frac{n_i[v(Q') - v(Q)]}{n_1^i \dots n_k^i}.$$

2: $k(Q') = k(Q) + 1 =: k + 1$. Dans ce cas-là $n_i v(Q) = \beta_{k+1}^i$ donc

$$\epsilon_i(\sigma(Q)) = \frac{(C_i, \Gamma)}{m(\Gamma)} = \frac{\overline{\beta_{k+1}^i}}{n_1^i \dots n_k^i}$$

et

$$\epsilon_i(\sigma(Q')) = \frac{(C_i, \Gamma')}{m(\Gamma')} = \frac{n_{k+1}^i \overline{\beta_{k+1}^i} + n_i v(Q') - \beta_{k+1}^i}{n_1^i \dots n_{k+1}^i},$$

donc

$$\epsilon_i(Q') - \epsilon_i(Q) = \frac{n_i v(Q') - \beta_{k+1}^i}{n_1^i \dots n_{k+1}^i} = \frac{n_i[v(Q') - v(Q)]}{n_1^i \dots n_{k+1}^i}.$$

Supposons maintenant que la chaîne élémentaire K_i a p sommets noirs $\{Q_1, \dots, Q_p\}$ ordonnés, c'est-à-dire $Q_l \leq Q_{l+1}$, et que $\mathcal{A}_i = \{a_1, \dots, a_p\}$ avec $a_l < a_{l+1}$ pour tout $l \in \{1, \dots, p-1\}$. Il est clair d'après la construction ci-dessus que $\rho_i(a_l) = Q_l$. Ainsi $a_l = \epsilon_i(\sigma(Q_l)) = (C_i, \Gamma_l)/m(\Gamma_l)$, pour tout $l \in \{1, \dots, p\}$ où $\Gamma_l \in \sigma(Q_l)$. Donc, d'après le lemme (6.1) on a:

$$a_l = \frac{n_{k_l}^i \overline{\beta_{k_l}^i} + n_i v(Q) - \beta_{k_l}^i}{n_1^i \dots n_{k_l}^i} \quad (9)$$

où $k_l := k(Q_l)$ et $n_i := m(C_i)$.

Soit Q_b le sommet de bifurcation le plus petit de K_i . Alors $\{Q_1, \dots, Q_{b-1}\}$ sont des sommets simples de $T(C)$, donc $d_1(Q_l) = 0$, $d_2(Q_l) = 1$ et $k(Q_l) = l - 1$ pour tout $l \in \{1, \dots, b - 1\}$. Si $l = 1$, on a $a_1 = \epsilon_i(\sigma(Q_1)) = n_i v(Q_1)$, donc $v(Q_1) = \epsilon_i(\sigma(Q_1))/n_i$. Comme on connaît la valeur de $\epsilon_i(\sigma(Q_1))$ et la multiplicité n_i de C_i , on peut calculer la valuation du sommet Q_1 . De plus comme Q_1 est un sommet simple de $T(C)$ sa valuation est égale à m_1^i/n_1^i , donc nous pouvons calculer à partir de la valeur de $v(Q_1)$ la première paire caractéristique de la branche C_i de C .

Maintenant, la première paire étant connue, nous calculons $l_1^i := n_i/n_1^i$ et à partir de la valeur $\overline{l_1^i}$ et de la paire (m_1^i, n_1^i) nous calculons $\beta_1^i = m_1^i l_1^i$ et le premier générateur $\overline{\beta_1^i}$ du semi-groupe de valeurs de C_i . Si $l = 2$, on a

$$a_2 = \epsilon_i(\sigma(Q_2)) = \frac{n_1^i \overline{\beta_1^i} + n_i v(Q_2) - \beta_1^i}{n_1^i}$$

et nous pouvons retrouver la valeur de $v(Q_2)$. Comme elle coïncide avec $m_2^i/n_1^i n_2^i$, on a $n_1^i v(Q_2) = m_2^i/n_2^i$ où $(m_2^i, n_2^i) = 1$. De cette manière nous calculons la deuxième paire caractéristique de la branche C_i , et en répétant la même processus que pour $l = 1$ nous calculons $l_2^i = n_i/n_1^i n_2^i$, $\beta_2^i = m_2^i l_2^i$ et $\overline{\beta_2^i} = n_1^i \overline{\beta_1^i} + \beta_2^i - \beta_1^i$. En répétant ce processus nous calculons la valeur de $v(Q_l)$ pour tout $l \in \{1, \dots, b - 1\}$. À cette étape du processus les $b - 1$ premiers exposants caractéristiques de C_i sont connus. De plus comme $k(Q_b) = b - 1$ d'après (9) nous pouvons calculer $v(Q_b)$.

Nous pouvons écrire $n_1^i \dots n_{b-1}^i v(Q_b) := A/B$ avec $\text{p.g.c.d}(A, B) = 1$. Maintenant pour calculer la valuation du sommet Q_{b+1} on doit déterminer si l'arête qui relie Q_b avec Q_{b+1} est pleine ou discontinue. Si $B = 1$, l'arête qui sort de Q_b vers le sommet Q_{b+1} est discontinue (d'après le lemme 6.2), donc $k(Q_{b+1}) = k(Q_b) = b - 1$ et nous pouvons déterminer la valuation de Q_{b+1} à partir de (9).

Supposons maintenant que $B \neq 1$. Si Q_b est le dernier sommet noir de la chaîne élémentaire K_i l'arête qui relie Q_b avec le sommet blanc sera discontinue si $n_1^i \dots n_{b-1}^i = m(C_i)$ et pleine dans le cas contraire. Si Q_b n'est pas le dernier sommet définissons les deux nombres suivants:

$$x_1 := \frac{n_1^i \dots n_{b-1}^i [\epsilon_i(\sigma(Q_{b+1})) - \epsilon_i(\sigma(Q_b))]}{n_i} + v(Q_b)$$

et

$$x_2 := \frac{n_1^i \dots n_{b-1}^i B [\epsilon_i(\sigma(Q_{b+1})) - \epsilon_i(\sigma(Q_b))]}{n_i} + v(Q_b).$$

Comme $B \neq 1$, on a $x_1 < x_2$. Maintenant calculons

$$y_1 := \frac{n_{b-1}^i \overline{\beta_{b-1}^i} + n_i x_1 - \beta_{b-1}^i}{n_1^i \dots n_{b-1}^i}$$

et

$$y_2 := n_{b-1}^i \overline{\beta_{b-1}^i} - \beta_{b-1}^i n_1^i \dots n_{b-1}^i + \frac{n_i x_2}{n_1^i \dots n_{b-1}^i} \frac{1}{B} + \frac{A n_i}{(n_1^i \dots n_{b-1}^i)^2 B}.$$

D'après la construction de l'ensemble \mathcal{A}_i il existe toujours $j \in \{1, 2\}$ tel que

$y_j = \epsilon_i(\sigma(Q_{b+1}))$; il suffit se rendre compte que $n_i v(Q_b) \leq \beta_b^i$ et que si $n_i v(Q_b)$ coïncide avec β_b^i alors la paire (A, B) coïncide avec le b -ième paire caractéristique de C_i et y_2 dévient la valeur de $\epsilon_i(\sigma(Q_{b+1}))$ et si $n_i v(Q_b) < \beta_b^i$ alors $\epsilon_i(\sigma(Q_{b+1})) = y_1$. Ainsi si $j = 1$ alors $v(Q_{b+1}) = x_1$ et $k(Q_{b+1}) = k(Q_b) = b - 1$ et si $j = 2$ alors $v(Q_{b+1}) = x_2$ et $k(Q_{b+1}) = k(Q_b) + 1 = b$.

De plus il existe une unique valeur $j \in \{1, 2\}$ qui vérifie $y_j = \epsilon_i(\sigma(Q_{b+1}))$. En effet, supposons que $y_1 = y_2 = \epsilon_i(\sigma(Q_{b+1}))$ alors

$$\frac{n_i x_1}{n_1^i \dots n_{b-1}^i} = \frac{n_i x_2}{n_1^i \dots n_{b-1}^i} \frac{1}{B} + \frac{A n_i}{(n_1^i \dots n_{b-1}^i)^2 B}$$

donc

$$n_i x_1 = n_i x_2 \frac{1}{B} + \frac{A n_i}{n_1^i \dots n_{b-1}^i B},$$

c'est-à-dire

$$n_i \left[x_1 - \frac{1}{B} x_2 \right] = \frac{A n_i}{n_1^i \dots n_{b-1}^i B},$$

mais $x_1 - B^{-1} x_2 = v(Q_b)(1 - B^{-1})$ donc

$$v(Q_b) \left(1 - \frac{1}{B} \right) = \frac{A}{B} \frac{1}{n_1^i \dots n_{b-1}^i}$$

et comme $n_1^i \dots n_{b-1}^i v(Q_b) = A/B$ alors $B^{-1} = 0$ ce qui est une contradiction. Donc nous déterminons la valeur du sommet Q_{b+1} et à partir d'elle décidons si la paire (A, B) est la b -ième paire caractéristique de C_i ou non.

Du cette manière nous pouvons déterminer le type de l'arête qui sort du sommet Q_b vers le sommet Q_{b+1} dans la chaîne élémentaire K_i de $T(C)$. On continue avec la même méthode pour retrouver les valuations de tous les sommets de K_i . En appliquant le même procédé pour chaque chaîne élémentaire nous arrivons à compléter le diagramme d'Eggers de C et donc à retrouver la topologie de C à partir de la matrice des invariants polaires partiels \mathcal{M} et de l'ensemble des multiplicités des branches de C .

REMARQUE 6.4. Nous pouvons utiliser dans le processus ci-dessus le Lemme 6.3 pour déterminer aussi les valeurs des sommets simples des chaînes élémentaires du diagramme d'Eggers si la valeur du point base de $T(C)$ est connue.

D'après l'étude ci-dessus on a le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. *La matrice des invariants polaires partiels \mathcal{M} et l'ensemble des multiplicités des branches de C déterminent la topologie de C .*

Appendice. Le théorème de Lê-Michel-Weber sur le comportement des polaires

Le but de cet appendice est montrer comment retrouver le théorème de Lê-Michel-Weber sur le comportement des polaires [8] à partir des résultats ci-dessus et de la construction du graphe dual de la résolution plongée minimale de la courbe C et sa comparaison avec le diagramme d'Eggers de C , qui sont faites dans le premier chapitre de [5].

Soit $\pi_0: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la résolution plongée minimale de $C \equiv f(x, y) = 0$ où $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est réduit et non identiquement nul. Soient $E_0 = \pi_0^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel de π_0 et G le graphe dual de la résolution plongée minimale de C .

Conventions sur le graphe de la résolution. Nous noterons #1 la composante irréductible de E_0 (et le sommet qui lui correspond dans G) créée lors du premier éclatement, c'est-à-dire, lors de l'éclatement de l'origine dans \mathbb{C}^2 .

Les arêtes de G sont *orientées positivement* lorsqu'on les parcourt en s'éloignant du sommet #1.

L'*origine* de l'arête α est le point du bord de α qui est le plus proche de #1; tandis que son *extrémité* est le point le plus éloigné.

La *valence d'un sommet* P de G , $v(P)$, est le nombre d'arêtes et de flèches (qui représentent les composantes de la transformée stricte de la courbe dans Σ_0) qui s'attachent à P .

Le sommet P est un *sommet de rupture* si $v(P) \geq 3$.

Le sommet P est une *extrémité de G* si P n'est pas égal à #1 et $v(P) = 1$.

Une *branche morte de G* est une géodésique de G reliant un sommet de rupture à une extrémité et telle que tous les autres sommets sur la géodésique aient valence 2. D'après la construction de G , d'un sommet de rupture il part au plus une branche morte.

Soit \overline{C} la transformée stricte de C par π_0 .

Les éléments de l'ensemble $I := \overline{C} \cap E_0$ sont appelées des *points de contact de C* .

Soit maintenant $P(\tau)$ une courbe polaire de C telle que $(1 : -\tau)$ n'appartient pas au cône tangent de C .

Notons $I_\tau = \overline{P(\tau)} \cap E_0$ où $\overline{P(\tau)}$ est la transformée stricte de $P(\tau)$ par π_0 .

THÉORÈME 6.2 (Lê–Michel–Weber [8]). *On a les résultats suivants:*

- (1) $I \cap I_\tau = \emptyset$; en d'autres termes, $P(\tau)$ se détache déjà de C dans la résolution minimale de C ;
- (2) si le cône tangent de C se compose exactement de deux droites, I_τ rencontre la composante #1 exactement une fois et en un point lisse;
- (3) I_τ rencontre au moins une fois chaque sommet de rupture de G sans branche morte; les points de contact en question sont tous lisses dans E_0 ;
- (4) I_τ rencontre chaque branche morte;
- (5) I_τ ne rencontre aucune composante irréductible de E_0 qui n'est pas mentionnée dans (2), (3) ou (4).

Démonstration. Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$ la décomposition de C en composantes irréductibles. Notons $\{\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\}$ l'ensemble des exposants caractéristiques de la branche C_i et $\alpha_{ij} := \text{cont}(C_i, C_j)$ avec $j \neq i$. D'après [7] et [4], on sait que si $P(\tau) = \bigcup_i \Gamma_i$ est la décomposition en composantes irréductibles de $P(\tau)$ alors

$$\text{cont}(C_i, \Gamma_l) \in \{\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\} \cup \{\alpha_{ij}\}_{j \neq i} =: A \cup B.$$

En général $A \cap B \neq \emptyset$. Ainsi d'après la construction (voir [5, chapitre 1, § 1.4.2]) du graphe de la résolution G de C on a $I \cap I_\tau = \emptyset$.

Supposons maintenant que le cône tangent de C se compose exactement de deux droites. D'après le Lemme 3.1 le point base Q de $T(C)$ vérifie $v(Q) = 1$, $d_1(Q) = t - 1$, $d_2(Q) = 0$ où t est le nombre des composantes tangentielles de C . D'après la proposition 4.3 on a $m(\Gamma^Q) = t - 1$. Puisque $t = 2$ le paquet Γ^Q de $P(\tau)$ est une branche lisse telle que $\text{cont}(C_i, \Gamma^Q) = m(C_i)$ pour toute branche C_i de C . Donc la branche Γ^Q est séparée de C au sommet #1 de G . De plus si $E_{0,1}$ est le diviseur qui apparaît par éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 , alors la transformée stricte de Γ^Q passe par le point M de $E_{0,1}$ de telle façon que la transformée stricte de la courbe C ne passe pas par M , et comme on continue à éclater des points de $E_{0,1}$ qui sont différents de M alors M reste un point lisse de #1.

En général si C a t composantes tangentielles, l'ensemble I_τ rencontre la composante #1 au minimum 1 fois (si Γ^Q est irréductible) et au maximum $t - 1$ fois (si Γ^Q est composée de $t - 1$ branches lisses).

Soit maintenant Γ_l une branche fixée de $P(\tau)$. Il y a deux possibilités.

1. Il existe $k \in \bigcup_{j=1}^r \{1, \dots, g_j\}$ et $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \beta_k^i$.
2. Il existe $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \alpha_{ij}$ avec $\alpha_{ij} \notin A$.

1. Si $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \beta_k^i$ d'après l'étude des propriétés des branches de la courbe polaire on a:

- (a) $(m_j^i, n_j^i) = (m_j(\Gamma_l), n_j(\Gamma_l))$ avec $1 \leq j \leq k - 1$.

De plus, d'après la section 5.1 on a:

(b) les k premiers exposants caractéristiques de Γ_l sont $\{\tilde{\beta}_j^i\}_{j=0}^{k-1}$ où $\tilde{x} = x(m(\Gamma_l)/n_i)$;

- (c) $l_j(\Gamma_l) = \text{p.g.c.d.}(\tilde{\beta}_0^i, \dots, \tilde{\beta}_j^i) = (m(\Gamma_l)/n_i)l_j^i = \tilde{l}_j^i$ pour tout $j \in \{1, \dots, k - 1\}$.

D'après le lemme 5.1 on a:

- (d) $\beta_k^i/n_i \leq \beta_k(\Gamma_l)/m(\Gamma_l)$.

Ainsi on a les résultants suivants.

(a) Si $\beta_k^i/n_i = \beta_k(\Gamma_l)/m(\Gamma_l)$, d'après la construction de G [5], Γ_l est séparée de C_i dans le graphe G au sommet de rupture S_r du sous-graphe G_k^i de G^i , où G^i est le graphe individuel de la résolution plongée minimale de C_i . Si S_r appartient à une branche morte de G on est dans l'énoncé (4) du théorème. Si S_r n'appartient pas à une branche morte de G on est dans l'énoncé (3) du théorème (cela peut arriver s'il apparaît un nouveau point de rupture de G dans la branche morte à laquelle S_r appartient comme élément du graphe individuel de C_i).

- (b) Si $\beta_k^i/n_i < \beta_k(\Gamma_l)/m(\Gamma_l)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_k(\Gamma_l) - \beta_{k-1}(\Gamma_l) + l_{k-1}(\Gamma_l)}{l_{k-1}(\Gamma_l)} &= \frac{\beta_k(\Gamma_l)}{\tilde{l}_{k-1}^i} - \frac{\tilde{\beta}_{k-1}^i}{\tilde{l}_{k-1}^i} + 1 \\
&= \frac{\delta}{l_{k-1}^i} - \frac{\beta_{k-1}^i}{l_{k-1}^i} + 1 \\
&= \frac{\delta - \beta_{k-1}^i + l_{k-1}^i}{l_{k-1}^i} \\
&> \frac{\beta_k^i - \beta_{k-1}^i + l_{k-1}^i}{l_{k-1}^i}. \tag{10}
\end{aligned}$$

De plus si les développements en fractions continues sont

$$\frac{\beta_k(\Gamma_l) - \beta_{k-1}(\Gamma_l) + l_{k-1}(\Gamma_l)}{l_{k-1}(\Gamma_l)} = [h_0^l, \dots, h_{t^l}^l]$$

et

$$\frac{\beta_k^i - \beta_{k-1}^i + l_{k-1}^i}{l_{k-1}^i} = [h_0^i, \dots, h_{t^i}^i],$$

d'après (10) il existe $r \in \{0, \dots, \min\{t^l, t^i\}\}$ tel que $h_j^i = h_j^l$, pour $1 \leq j \leq r-1$, et $h_r^i \neq h_r^l$. Si $r = 0$, d'après l'inégalité (10), $h_0^i < h_0^l$ donc Γ_l est séparée de C_i au premier sommet de la sous-chaîne $K_1^{k(i)}$ qui forme le sous-graphe G_k^i de G^i , donc en un sommet qui appartient à une branche morte de G . Si $r = 1$, d'après (10) et les propriétés des développements en fractions continues $h_1^l < h_1^i$ et Γ_l est séparée de C_i au premier sommet de la sous-chaîne $K_2^{k(i)}$ qui forme le sous-graphe G_k^l de G^l , et comme $h_1^i > h_1^l$, ce sommet est un sommet de la chaîne $K_1^{k(i)}$ de C_i et appartient à une branche morte de G . Il est évident, d'après la construction du graphe dual de la résolution de C , que les points de contact sont tous lisses dans E_0 .

2. Si $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \alpha_{ij}$ avec $\alpha_{ij} \notin A$, alors $\text{cont}(C_i, \Gamma_l) = \text{cont}(C_i, C_j) \notin A$, c'est-à-dire $\text{cont}(C_i, \Gamma_l)$ n'est pas un exposant caractéristique de C_i de Γ_l est séparée de C_i au sommet où C_j est séparée de C_i , c'est-à-dire dans un sommet de bifurcation de G .

On trouve que Γ_l est toujours séparée dans un sommet d'une branche morte de G . L'énoncé (5) du théorème résulte aussitôt de cette étude.

Erratum, le 21 mars 2000. L'argument utilisé dans la Proposition 4.1 pour montrer que A_Q n'est pas vide est faux. Cependant le résultat est vrai et on peut le déduire de la Proposition 4.3 (qui n'utilise pas la Proposition 4.1) car $\sum_{\Gamma_l \in A_Q} m(\Gamma_l) \geq 1$ pour tout Q sommet noir de $T(C)$.

Je remercie Patrick Popescu Pampu de m'avoir fait remarquer cette erreur.

References

1. E. CASAS-ALVERO, 'Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves', *Math. Ann.* 287 (1990) 429–454.
2. E. CASAS-ALVERO, 'Base points of polar curves', *Ann. Inst. Fourier* 41 (1991) 1–10.
3. F. DELGADO DE LA MATA, 'A factorization theorem for the polar of a curve with two branches', *Compositio Math.* 92 (1994) 327–375.
4. H. EGGERS, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Mathematische Schriften 147 (Universität Bonn, 1983).
5. E. GARCÍA BARROSO, 'Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor', doctoral thesis, La Laguna University, 1996; LMENS server, <http://www.dmi.ens.fr/>.
6. J. GWOŹDZIEWICZ and A. PŁOSKI, 'On the Merle formula for polar invariants', *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź* 41 (1991) 61–67.
7. T. C. KUO and Y. C. LU, 'On analytic function germs of two complex variables', *Topology* 16 (1977) 299–310.
8. LÊ-DŨNG-TRÁNG, F. MICHEL and C. WEBER, 'Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes', *Compositio Math.* 72 (1989) 87–113.
9. M. MERLE, 'Invariants polaires des courbes planes', *Invent. Math.* 41 (1977) 103–111.
10. M. PLÜCKER, 'Sur les points singuliers des courbes', *Journal de Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville)* 2 (1837) 11–15.

11. M. PONCELET, 'Théorie des polaires réciproques', *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 8 (1817–18) 201–232.
12. B. SEGRE, 'Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche', *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 33 (1952) 5–48.
13. H. J. S. SMITH, 'On the higher singularities of plane curves', *Proc. London Math. Soc.* 6 (1875) 153–182.
14. B. TEISSIER, 'Introduction to equisingularity problems', *Algebraic geometry* (ed. R. Hartshorne), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 29 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1975) 593–632.
15. B. TEISSIER, 'The hunting of invariants in the geometry of discriminants', *Real and complex singularities*, Proceedings of the Nordic Summer School, Oslo 1976 (ed. P. Holm, Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1977) 565–678.
16. B. TEISSIER, 'Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités des hypersurfaces', *Invent. Math.* 40 (1977) 267–292.
17. B. TEISSIER, 'Courbes polaires relatives et courbure d'hypersurfaces de niveau', non publié, École Normale Supérieure, Paris, 1988.
18. O. ZARISKI, *Le problème des modules pour les branches planes* (Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, 1973; réédition Hermann, Paris, 1986).
19. O. ZARISKI, 'General theory of saturation and of saturated local rings II', *Equisingularity on algebraic varieties* (ed. J. Lipman and B. Teissier), Collected Papers, Volume IV (MIT Press, Cambridge, MA, 1979) 261–343.
20. O. ZARISKI, 'Questions in algebraic varieties', *Contribution to the problems of equisingularity* (CIME, Edizioni Cremonese, Roma, 1970) 261–343.

Evelia García Barroso
Departamento de Matemática Fundamental
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna
Tenerife
Spain
ergarcia@ull.es